FM210 / MA - Prima prova pre-esonero (4-4-2018)

1. Una particella di massa m si muove in una dimensione sotto l'effetto di una forza posizionale, come descritto dalla seguente equazione:

$$m\ddot{x} = A\frac{x^2 - 2xx_0 - 3x_0^2}{x^4},$$

dove A e x_0 sono parametri positivi e $x \neq 0$.

(a) Si determini un integrale primo del moto e se ne verifichi esplicitamente la conservazione

(b) Si disegni il grafico del potenziale. Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità. Per i punti di equilibrio stabile, si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio.

(c) Si disegni il grafico delle curve di livello sul piano delle fasi $(x, \dot{x})$ e si discuta la natura qualitativa del moto, al variare della grandezza conservata identificata sopra.

(d) Si identifichino i dati iniziali che producono moti periodici non banali, e si calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

(e) Nel caso di moti aperti, si discuta se la soluzione corrispondente è definita globalmente nel tempo o no.

(f) Esistono soluzioni non globali nel tempo? In caso, quali?

SOLUZIONE.

(a) L'equazione assegnata è conservativa, con energia meccanica $U(x)$ tale che

$$U'(x) = -A\frac{x^2 - 2xx_0 - 3x_0^2}{x^4} = A\Big(-\frac{1}{x^2} + \frac{2x_0}{x^3} + \frac{3x_0^2}{x^4}\Big).$$

Calcolando una primitiva di questa equazione troviamo:

$$U(x) = A\Big(\frac{1}{x} - \frac{x_0}{x^2} - \frac{x_0^2}{x^3}\Big) = A\frac{x^2 - xx_0 - x_0^2}{x^3}.$$

Un integrale primo del moto è l'energia meccanica

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x),$$

la cui conservazione si verifica facilmente considerando la derivata di E rispetto al tempo:

$$\dot{E} = \dot{x}\Big[m\ddot{x} + U'(x)\Big],$$

che è zero, poiché l'espressione in parentesi quadra è nulla per l'equazione del moto $m\ddot{x} = -U'(x)$.

(b) Per studiare il grafico dell'energia potenziale, studiamo il comportamento di U ai bordi del dominio di definizione, il suo segno, e il segno della sua derivata.

• Comportamento ai bordi del dominio di definizione: $\lim_{x\to\pm\infty} U(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^\pm} = \mp\infty$.

• Segno di U: ricordiamo che $U(x) = A(x^2 - xx_0 - x_0^2)/x^3$ e notiamo che l'espressione al numeratore si può riscrivere come $(x - x_-)(x - x_+)$, con $x_\pm = \frac{x_0}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Abbiamo quindi che $U(x)$ si annulla in $x_\pm$, è positivo per $x > x_+$ e per $x_- < x < 0$, è negativo per $x < x_-$ e per $0 < x < x_+$.

• Segno di U': ricordiamo che $U'(x) = -A(x^2 - 2xx_0 - 3x_0^2)/x^4 = -A(x - 3x_0)(x + x_0)/x^4$. Abbiamo quindi che $U'(x)$ si annulla in $-x_0$ e in $3x_0$, è positivo per $-x_0 < x < 0$ e per $0 < x < 3x_0$, e negativo per $x < -x_0$ e per $x > 3x_0$.

Il grafico qualitativo di U è mostrato in figura 1.

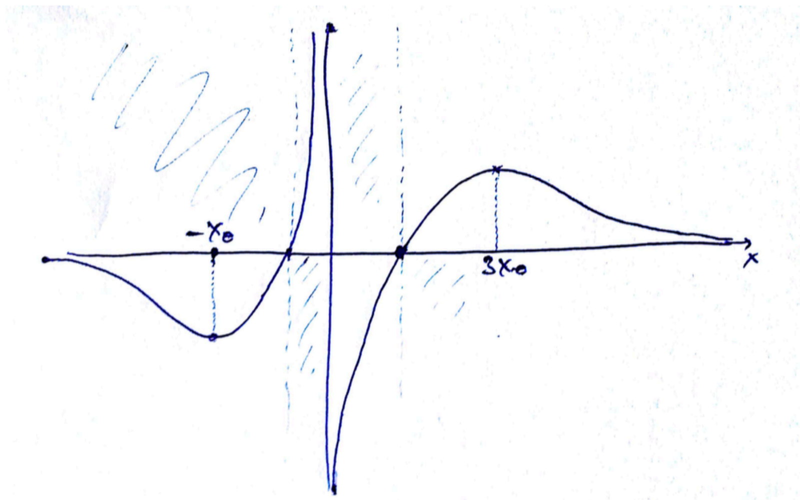

Figura 1: Grafico del potenziale $U(x)$.

Si noti in particolare che il sistema ammette due punti di equilibrio, $-x_0$ e $3x_0$, il primo stabile, in quanto minimo locale del potenziale, e il secondo instabile, in quanto massimo locale.

L'equazione delle piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile è

$$m\ddot{x} = -U''(-x_0)(x + x_0),$$

dove

$$U''(-x_0) = A\Big(\frac{2}{x^3} - \frac{6x_0}{x^4} - \frac{12x_0^2}{x^5}\Big)\Big|_{x=-x_0} = \frac{4A}{x_0^3}.$$

La frequenza delle piccole oscillazioni attorno a $-x_0$ è quindi $\omega = \sqrt{U''(-x_0)/m} = 2\sqrt{A/(mx_0^3)}$.

(c) Il grafico qualitativo delle curve di livello sul piano delle fasi $(x, \dot{x})$ è mostrato in figura 2.

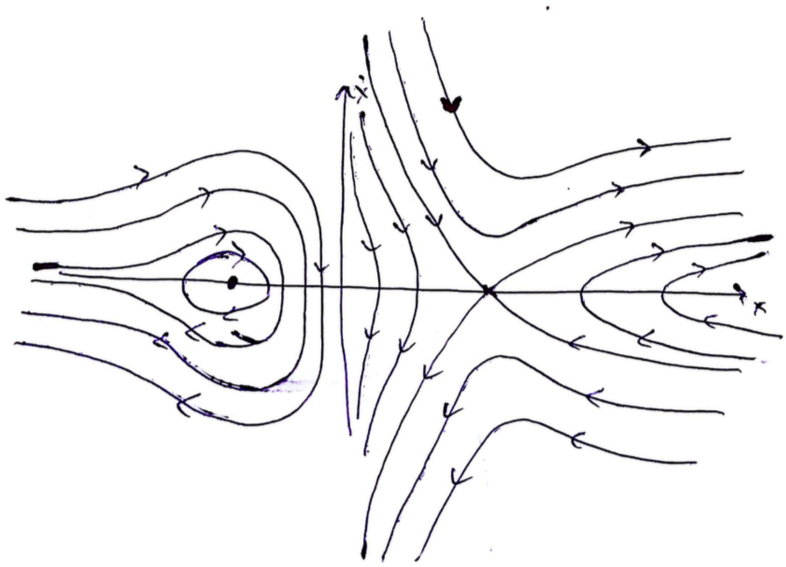

Figura 2: Grafico delle curve di livello, al variare dell'energia E.

I moti del sistema si svolgono o alla sinistra o alla destra del punto di singolarità $x = 0$. Discutiamone separatamente la natura.

− Moti che si svolgono alla sinistra del punto di singolarità: $x < 0$. A seconda del dato iniziale, ci sono diversi moti possibili:

- Se $E = E_1 := U(-x_0)$, il moto è quello 'banale' sul punto di equilibrio stabile, $x(t) \equiv -x_0$
- Se $E_1 < E < 0$, il moto è periodico e consiste in oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile

- Se $E = 0$ il moto è aperto, $x(t)$ tende a $-\infty$ sia nel passato che nel futuro, e raggiunge l'infinito con velocità nulla
- Se $E > 0$ il moto è aperto, $x(t)$ tende a $-\infty$ sia nel passato che nel futuro, e raggiunge l'infinito con velocità positiva

$-$ Moti che si svolgono alla destra del punto di singolarità: $x > 0$. A seconda del dato iniziale, ci sono diversi moti possibili:

- Se $E = E_2 := U(3x_0)$, il sistema ammette sia il moto 'banale' sul punto di equilibrio instabile, $x(t) \equiv 3x_0$, sia moti critici non banali: se $x(0) < 3x_0$, $x(t)$ tende a 0^+ (ovvero, cade sulla singolarità) nel passato e a $3x_0$ nel futuro, o viceversa; se $x(0) > 3x_0$, $x(t)$ tende a $+\infty$ (ovvero, fugge all'infinito) nel passato e a $3x_0$ nel futuro, o viceversa.
- Se $E < E_2$ e $x(0) < 3x_0$, il moto cade sulla singolarità sia nel passato che nel futuro; se $E < E_2$ e $x(0) > 3x_0$, il moto fugge a $+\infty$ sia nel passato che nel futuro
- Se $E > E_2$ il moto è aperto, $x(t)$ cade nella singolarità nel passato e fugge a $+\infty$ nel futuro, o viceversa.

(d) Come discusso sopra, i dati iniziali associati a moti periodici sono quelli per cui $E_1 < E < 0$ e $x(0) < 0$. Il periodo del moto corrispondente è

$$T = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}},$$

con $x_- < -x_0 < x_+ < 0$ le due radici negative dell'equazione $U(x) = E$.

(e) I moti per cui la particelle sfugge all'infinito hanno energia ≥ 0 (quelli che sfuggono a $+\infty$ hanno energia positiva, mentre quelli che sfuggono a $-\infty$ hanno energia positiva o nulla). Il tempo di fuga a $+\infty$ da un punto $x' > 0$ è $t_{+\infty} = \int_{x'}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}$, che è infinito, poichè la funzione integranda tende a $\sqrt{\frac{m}{2E}}$ per $x \to +\infty$, che ovviamente non è integrabile a infinito. Allo stesso modo, si vede che il tempo di fuga a $-\infty$ da un punto $x'' < 0$ è infinito. Di conseguenza tutti i moti aperti che tendono all'infinito sia nel passato che nel futuro sono globali nel tempo; altrettanto per i moti critici a energia $E = E_2$ che tendono a $+\infty$ nel futuro e al punto di equilibrio instabile $3x_0$ nel passato, o viceversa. Per quanto riguarda i moti aperti che cadono in $x = 0$ nel passato e sfuggono a $+\infty$ nel futuro (o viceversa), questi sono globali o no a seconda che il tempo di caduta nell'origina sia infinito o finito (vedi prossimo punto).

(f) Gli unici moti che possono essere non globali sono quelli che cadono nell'origine o nel futuro o nel passato (o in entrambi i casi). Il tempo di caduta nell'origine a partire da un punto $\bar{x} > 0$ è $t_0 = \int_0^{\bar{x}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}$, che è finito, come si vede valutando asintoticamente la funzione integranda nel limite $x \to 0$ (in tale limite la funzione integranda si comporta come $\sqrt{\frac{m}{2Ax_0^2}}x^{3/2}$, che è ovviamente integrabile per x piccoli.

2. Il moto di una particella di massa m in $\mathbb{R}^3$ è descritto dalla seguente equazione del moto associata a una forza centrale:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{2V_0}{r_0^2} e^{-|\mathbf{r}|^2/r_0^2}\mathbf{r},$$

dove V_0 e r_0 sono parametri positivi.

(a) Si determinino le grandezze conservate e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.

(b) Usando le leggi di conservazione identificate sopra, si osservi che, in generale, il moto si svolge su un piano (quale?). Si descriva il sistema in coordinate polari su tale piano, si scriva l'equazione del moto per la variabile radiale ρ e si determini il potenziale efficace corrispondente

(c) Si disegni il grafico del potenziale efficace e delle curve di livello nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$, al variare delle grandezze conservate.

(d) Si determinino i punti di equilibrio del moto radiale e si discuta la natura qualitativa del moto, al variare delle grandezze conservate.

(e) Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo corrispondente (se necessario, in termini di un integrale definito).

(f) Si discute se le soluzioni sono tutte globali nel tempo o no.

SOLUZIONE.

(a) Come per tutti i moti in campo centrale, le grandezze conservate sono:

- l'energia meccanica

$$E = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{r}}|^2 + V(|\mathbf{r}|),$$

con $V(|\mathbf{r}|)$ il potenziale centrale associato alla forze assegnata. Tale potenziale può essere calcolato imponendo la condizione

$$V'(\rho) = \frac{2V_0\rho}{r_0^2} e^{-\rho^2/r_0^2},$$

che implica

$$V(\rho) = -V_0 e^{-\rho^2/r_0^2}.$$

- il momento angolare

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}.$$

Verifichiamo esplicitamente la conservazione delle due grandezze. Derivando rispetto al tempo l'energia troviamo:

$$\dot{E} = m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} V(|\mathbf{r}|),$$

che è nullo poichè, per costruzione, $m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} V(|\mathbf{r}|)$. Derivando rispetto al tempo il momento angolare troviamo

$$\dot{\mathbf{L}} = m\dot{\mathbf{r}} \wedge \dot{\mathbf{r}} + m\mathbf{r} \wedge \ddot{\mathbf{r}},$$

che è nullo, poichè i due termini a membro di destra sono separatamente nulli (il primo è zero a vista, il secondo è zero poichè $\ddot{\mathbf{r}}$ è parallelo a $\mathbf{r}$, per l'equazione del moto e la natura centrale della forza).

(b) Come discusso a lezione, la conservazione della direzione del momento angolare impone che $\mathbf{r}$ e $\dot{\mathbf{r}}$ appartengono a ogni istante al piano perpendicolare a $\mathbf{L}$ e passante per il centro della forza. Il moto si svolge quindi su tale piane. Passando a coordinate polari ρ, θ su tale piano, l'equazione per la variabile radiale è $m\ddot{\rho} = V'_{eff}(\rho)$, dove

$$V_{eff}(\rho) = \frac{L^2}{2m\rho^2} - V_0 e^{-\rho^2/r_0^2}.$$

(c) Studiamo il comportamento qualitativo della funzione $V_{eff}(\rho)$. Consideriamo per semplicità solo il caso $L \neq 0$. In tal caso $V_{eff}(\rho)$ diverge a $+\infty$ per $\rho \to 0^+$ e tende a zero per $\rho \to +\infty$. Si noti, in particolare, che, per $\rho \to \infty$, $V_{eff}(\rho) \sim \frac{L^2}{2m\rho^2}$, quindi $V_{eff}(\rho)$ tende a zero da valori positivi per $\rho \to \infty$. Quindi la derivata di V_{eff} è negativa sia per valori piccoli che per valori grandi. Per stabilire se la funzione ammette minimi e massimi locali per valori intermedi di ρ, determiniamo quanti punti critici ha, e studiamo quindi l'equazione

$$V'_{eff}(\rho) = -\frac{L^2}{m\rho^3} + \frac{2V_0\rho}{r_0^2} e^{-\rho^2/r_0^2} = 0 \iff \frac{L^2}{2mV_0 r_0^2} = \frac{\rho^4}{r_0^4} e^{-\rho^2/r_0^2}.$$

Definendo $\alpha := \frac{L^2}{2mV_0 r_0^2} > 0$ e $f(x) := x^4 e^{-x^2}$, vediamo quindi che l'equazione per i punti critici del potenziale efficace può essere riscritta nella forma

$$f(\rho/r_0) = \alpha.$$

Vogliamo stabilire quante radici positive ha tale equazione. Risolviamo l'equazione con un metodo grafico: disegniamo il grafico di f per argomento positivo e vediamo quante volte interseca la retta orizzontale ad altezza $\alpha > 0$. Ora: $f(x)$ è una funzione positiva per $x > 0$, che si annulla in zero e tende a zero per $x \to +\infty$; inoltre, studiandone la derivata, è facile verificare che $f(x)$ è crescente per $0 < x < \sqrt{2}$ e decrescente per $x > \sqrt{2}$. Quindi il suo massimo, assunto in $x = \sqrt{2}$, è uguale a $f_{max} = 4e^{-2}$. Quindi l'equazione $f(\rho/r_0) = \alpha$ ammette: due radici distinte se $0 < \alpha < 4e^{-2}$ (o, equivalentemente, $L < 2\sqrt{2mV_0}\, r_0 e^{-1}$); due radici coincidenti per $\alpha = 4e^{-2}$ (o, equivalentemente, $L = 2\sqrt{2mV_0}\, r_0 e^{-1}$); nessuna radice per $\alpha > 4e^{-2}$ (o, equivalentemente, $L > 2\sqrt{2mV_0}\, r_0 e^{-1}$). Il grafico qualitativo di V_{eff} nei tre casi è mostrato in figura 3.

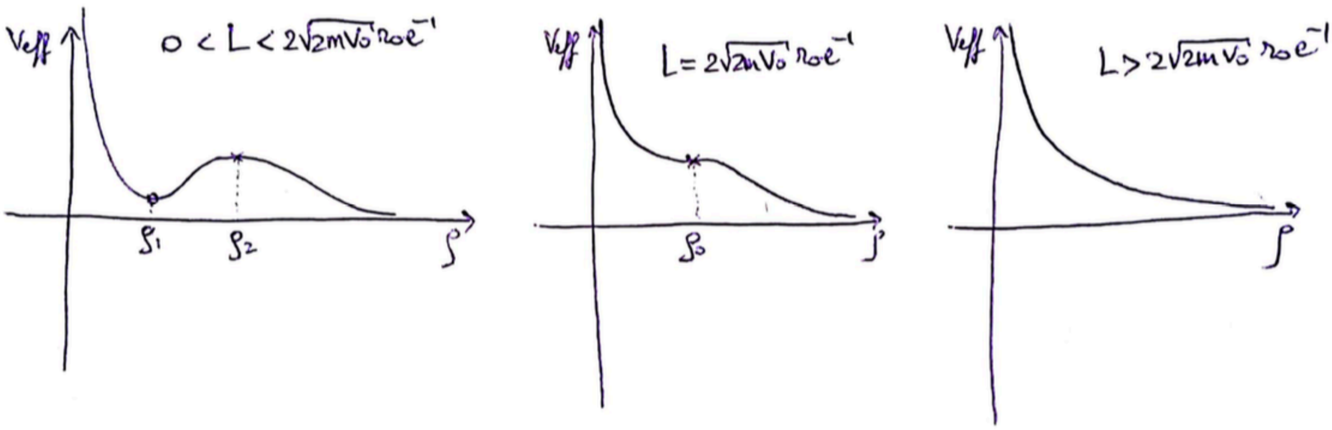

Figura 3: Grafico del potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$ al variare di $L > 0$.

Nel primo caso, $L < 2\sqrt{2mV_0} r_0 e^{-1}$, abbiamo chiamato ρ_1 il minimo locale del potenziale (punto di equilibrio stabile del moto radiale) e ρ_2 il massimo locale (punto di equilibrio instabile del moto radiale), e nel secondo caso ($L = 2\sqrt{2mV_0} r_0 e^{-1}$) abbiamo chiamato ρ_0 il punto di flesso (punto di equilibrio instabile del moto radiale). Si noti che, nel primo caso, il grafico ha una forma qualitativa leggermente diversa, a seconda che il valore dell'energia sul minimo sia positiva, nulla o negativa; le condizioni su L per cui si verificano questi tre sotto-casi possono essere determinate esplicitamente, ma le lasciamo al lettore. Il grafico mostrato in figura assume chiaramente che $V_{eff}(\rho_1) > 0$.

Il grafico qualitativo delle curve di livello, al variare di E e di L, è mostrato in figura 4.

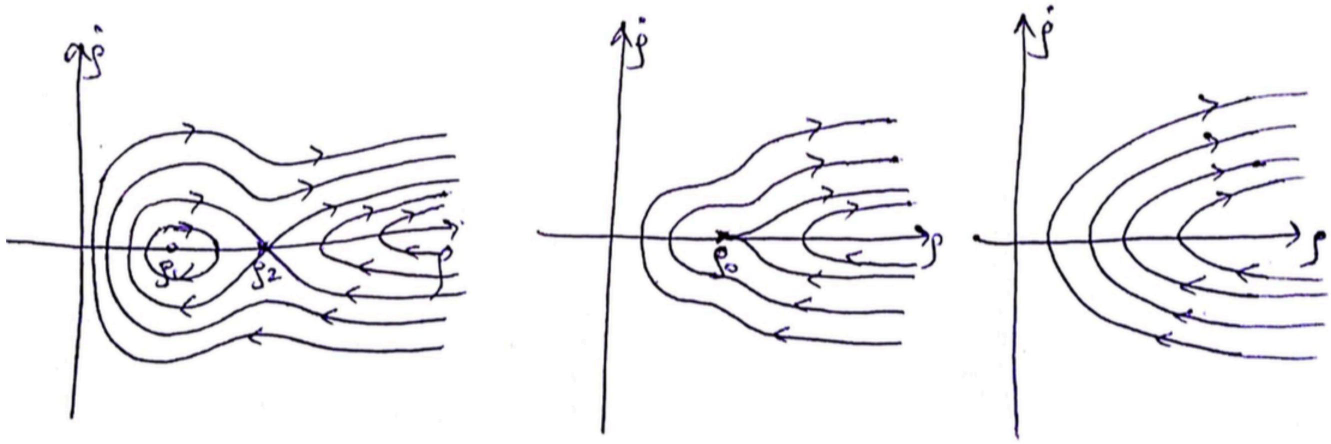

Figura 4: Grafico delle curve di livello associate al potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$ al variare di $L > 0$ e dell'energia E.

(d) Al variare di E, L il sistema ammette moti con una diversa natura qualitativa, come discusso nel seguito.

- $0 < L < 2\sqrt{2mV_0}r_0e^{-1}$. Oltre ai moti 'banali' sui punti di equilibrio, $\rho(t) \equiv \rho_1$ e $\rho(t) \equiv \rho_2$, il sistema ammette i seguenti moti:
  - Per $V_{eff}(\rho_1) < E < V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) < \rho_2$, il moto radiale è periodico, di periodo
  $$T_0 = 2\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}},$$
  dove $\rho_\pm$ sono le due radici di $E = V_{eff}(\rho)$, tali che $0 < \rho_- < \rho_1 < \rho_+ < \rho_2$.
  - Per $E < V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) > \rho_2$ il moto radiale è aperto, e $\rho(t)$ tende all'infinito sia nel passato che nel futuro.
  - Per $E > V_{eff}(\rho_2)$ il moto radiale è aperto, e $\rho(t)$ tende all'infinito sia nel passato che nel futuro.
  - Per $E = V_{eff}(\rho_2)$ il sistema ammette due tipi di moti critici, oltre al moto banale sul punto di equilibrio instabile:

se $\rho(0) < \rho_2$ il moto è limitato e a-periodico, e $\rho(t)$ tende a ρ_2 sia nel passato che nel futuro; se $\rho(0) > \rho_2$, $\rho(t)$ tende a ρ_2 nel passato e all'infinito nel futuro, o viceversa.

- $L = 2\sqrt{2mV_0}r_0e^{-1}$. Oltre al moto 'banale' sul punto di equilibrio, $\rho(t) \equiv \rho_0$, il sistema ammette i seguenti moti:
  - Per $E > 0$ e $E \neq V_{eff}(\rho_0)$, il moto radiale è aperto, e $\rho(t)$ tende all'infinito sia nel passato che nel futuro.
  - Per $E = V_{eff}(\rho_0)$ e $\rho(0) > \rho_0$, $\rho(t)$ tende a ρ_0 nel passato e all'infinito nel futuro, o viceversa.
- $L > 2\sqrt{2mV_0}r_0e^{-1}$. Tutti i moti radiali sono aperti: $\rho(t)$ tende all'infinito sia nel passato che nel futuro.

(e) Il moto complessivo è periodico in due casi:

- se $\rho(t) \equiv \rho_{eq}$ (dove $\rho_e q$ è uno dei punti di equilibrio del sistema, ovvero ρ_0, ρ_1 o ρ_2, a seconda dei casi), nel qual caso il moto complessivo è circolare uniforme, con periodo $T = 2\pi m\rho_e q^2/L$;
- se $\rho(t)$ è periodico (cosa che si verifica per $0 < L < 2\sqrt{2mV_0}r_0e^{-1}$, nel caso in cui $V_{eff}(\rho_1) < E < V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) < \rho_2$), nel qual caso il moto complessivo è periodico o quasi-periodico, a seconda che il rapporto tra il periodo T_0 del moto radiale e il secondo periodo T_1 del moto angolare sia razionale o irrazionale; il moto complessivo è quindi periodico nel caso in cui

$$\frac{T_0}{T_1} = \frac{1}{\pi}\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{L}{m\rho^2}\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}} = \frac{n}{m},$$

  per una coppia di n, m interi e primi tra loro; tale condizione si verifica per una scelta densa (ma di misura nulla) di valori di E, L; nel caso in cui sia verificata, il periodo del moto complessivo è $T = mT_0 = nT_1$.

(f) Visto che il potenziale efficace è limitato dal basso, tutte le soluzioni sono globali nel tempo, come discusso a lezione (è infatti evidente che in questo caso che il tempo di fuga all'infinito è sempre infinito - dettagli lasciati al lettore).