Corsi di laurea in Matematica e Fisica - Anno Accademico 2017/18

FM210 / MA

Primo Scritto [21-6-2018]

1. Si consideri il sistema meccanico bidimensionale

$$\ddot{\mathbf{x}} = (|\mathbf{x}|^4 - 1)\mathbf{x},$$

per $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

(a) Si identifichino due integrali primi del moto e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.

(b) Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità.

(c) Si descriva il moto in coordinate polari ρ, θ e si scriva l'equazione del moto per la variabile radiale. Si discuta la natura qualitativa del moto radiale al variare dei dati iniziali. In particolare: si disegni il grafico delle traiettorie nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$ ('curve di livello') e si discuta per quali dati iniziali il moto è limitato o illimitato.

(d) Si esibisca un dato iniziale per cui il moto complessivo è periodico non banale e se ne calcoli il periodo (eventualmente in termini di un integrale definito).

(e) Si esibisca un dato iniziale per cui il moto è illimitato e si stabilisca se il tempo di fuga all'infinito è finito o infinito.

2. Un sistema meccanico è costituito da due sbarre uguali, rettilinee, omogenee, pesanti, di massa M e lunghezza ℓ, vincolate a muoversi su un piano verticale. La sbarra AB ha l'estremo A vincolato a scorrere sulla retta orizzontale passante per O, mentre l'estremo B è vincolato a scorrere sulla retta verticale passante per O, come descritto in figura.

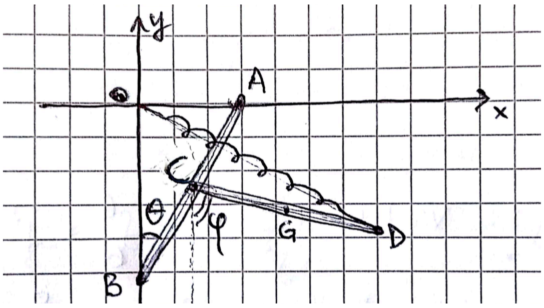

Figura 1: Il sistema di due aste vincolato descritto nel testo.

La sbarra CD ha l'estremo C incernierato nel punto di mezzo della sbarra AB. Oltre alla forza gravitazionale, il sistema è soggetto a una forza elastica di costante elastica k, che agisce su D e ha centro in O.

Tutti i vincoli sono supposti ideali. Si usino come coordinate Lagrangiane gli angoli θ e φ mostrati in figura.

(a) Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.

(b) Riconoscere che i punti $(\theta, \varphi) = (0, 0), (\pi, 0), (0, \pi), (\pi, \pi)$ sono punti di equilibrio, e studiare la stabilità del punto $(0, 0)$ al variare di k. [**Facoltativo**: determinare gli eventuali altri punti di equilibrio, al variare di k].

(c) Si consideri ora il caso in cui il sistema si muove in assenza di gravità, ovvero, si ponga l'accelerazione di gravità g uguale a 0 nelle equazioni del moto determinate sopra. Riconoscere che la Lagrangiana è invariante sotto il gruppo di trasformazioni a un parametro $g_\alpha(\theta, \varphi) = (\theta + \alpha, \varphi + \alpha)$ e calcolare la carica di Noether corrispondente.