Corsi di laurea in Matematica e Fisica - Anno Accademico 2017/18

FM210 / MA

Secondo Scritto [9-7-2018]

1. Un punto materiale di massa m, carica q e coordinate $\mathbf{r} = (x, y, z)$ si muove in $\mathbb{R}^3$ sotto l'effetto della forza peso $\mathbf{F}_p = -mg\hat{z}$, dove $g > 0$ è l'intensità dell'accelerazione di gravità, e di una forza elettrica costante $\mathbf{F}_e = qE_0(\hat{x} + \hat{y})$, dove E_0 è l'intensità del campo elettrico. Inoltre, è vincolato a muoversi sulla superficie di equazione $z = y^2$. Le forze di reazione vincolare che mantengono il punto su tale superficie si possono assumere ideali.

   (a) Si scriva la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le prime due coordinate del punto materiale, x e y.

   (b) Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange, e si riconosca che le equazioni per x e per y sono disaccoppiate. Si usi tale osservazione per determinare due grandezze conservate del moto.

   (c) Determinare per quali valori di E_0 il sistema ammette punti di equilibrio. Par tali valori, qual è la natura (stabile o instabile) dei punti di equilibrio?

   (d) Si risolva esplicitamente l'equazione del moto per la variabile x.

   (e) Si risolva per quadrature l'equazione del moto per la variabile y. In particolare:

      i. si disegni il grafico qualitativo del potenziale per la variabile y,

      ii. si disegni un grafico qualitativo delle curve di livello,

      iii. si discuta la natura qualitativa dei moti della variabile y.

   (f) Si identifichino le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo nella forma di un integrale definito.

2. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{q} = p - q^2 \\ \dot{p} = 2pq - 2q^3. \end{cases}$$

(a) Si riconosca che tale sistema è Hamiltoniano, e si calcoli l'Hamiltoniana corrispondente.

(b) Scrivere e risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione generatrice di seconda specie $S(q, P)$, che mappi l'Hamiltoniana determinata sopra in $\tilde{H}(Q, P) = P^2/2$.

(c) Si determini la trasformazione canonica associata ad $S(q, P)$ e se ne calcoli l'inversa.

(d) Si usi la trasformazione canonica determinata sopra per risolvere le equazioni del moto in corrispondenza dei dati iniziali $q(0) = 1$, $p(0) = 4$. Si verifichi esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni del moto originali.