Corsi di laurea in Matematica e Fisica - Anno Accademico 2017/18

FM210 / MA

Secondo Scritto [9-7-2018]

1. Un punto materiale di massa m, carica q e coordinate $\mathbf{r} = (x, y, z)$ si muove in $\mathbb{R}^3$ sotto l'effetto della forza peso $\mathbf{F}_p = -mg\hat{z}$, dove $g > 0$ è l'intensità dell'accelerazione di gravità, e di una forza elettrica costante $\mathbf{F}_e = qE_0(\hat{x} + \hat{y})$, dove E_0 è l'intensità del campo elettrico. Inoltre, è vincolato a muoversi sulla superficie di equazione $z = y^2$. Le forze di reazione vincolare che mantengono il punto su tale superficie si possono assumere ideali.

   (a) Si scriva la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le prime due coordinate del punto materiale, x e y.

   (b) Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange, e si riconosca che le equazioni per x e per y sono disaccoppiate. Si usi tale osservazione per determinare due grandezze conservate del moto.

   (c) Determinare per quali valori di E_0 il sistema ammette punti di equilibrio. Par tali valori, qual è la natura (stabile o instabile) dei punti di equilibrio?

   (d) Si risolva esplicitamente l'equazione del moto per la variabile x.

   (e) Si risolva per quadrature l'equazione del moto per la variabile y. In particolare:

      i. si disegni il grafico qualitativo del potenziale per la variabile y,

      ii. si disegni un grafico qualitativo delle curve di livello,

      iii. si discuta la natura qualitativa dei moti.

   (f) Si identifichino le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo nella forma di un integrale definito.

SOLUZIONE.

(a) Si noti che le forze cui è soggetto il punto materiale sono conservative, con energia potenziale totale uguale a

$$U = mgz - qE_0(x + y).$$

Le posizioni del punto materiale compatibili con la superficie del vincolo $z = y^2$ possono essere parametrizzate come segue:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

Se x e y variano nel tempo, $x = x(t)$ e $y = y(t)$, la derivata temporale di $\mathbf{r}$ diventa:

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 2y\dot{y} \end{pmatrix},$$

cosicchè l'energia cinetica della particella sul vincolo ha la forma: $\frac{m}{2}|\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2(1+4y^2))$. La Lagrangiana del sistema è quindi:

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2(1+4y^2) - mgy^2 + qE_0(x+y).$$

(b) Le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qE_0, \qquad (1)\\ m\frac{d}{dt}\big(\dot{y}(1+4y^2)\big) &= 4my\dot{y}^2 - 2mgy + qE_0, \end{aligned}$$

che sono evidentemente disaccoppiate. Calcolando esplicitamente la derivata rispetto al tempo nella seconda equazione, riconosciamo che l'equazione per y si può riscrivere, più esplicitamente, nella forma:

$$m\ddot{y}(1+4y^2) = -4my\dot{y}^2 - 2mgy + qE_0. \qquad (2)$$

Il fatto che le equazioni per la x e per la y siano disaccoppiate corrisponde al fatto che la Lagrangiana del sistema è 'separabile', ovvero, è la somma di due funzioni di $(x, \dot{x})$ e di $(y, \dot{y})$, rispettivamente. Analogamente, l'energia meccanica totale del sistema è la somma di due contributi, il primo dipendente solo da $(x, \dot{x})$ e il secondo da $(y, \dot{y})$. Data la struttura delle equazioni del moto, i due contributi si conservano separatamente, e sono definiti come segue:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{m}{2}\dot{x}^2 - qE_0 x,\\ H_2 &= \frac{m}{2}\dot{y}^2(1+4y^2) + mgy^2 - qE_0 y. \end{aligned}$$

La conservazione di H_1 e H_2, ovvero il fatto che la loro derivata temporale, se calcolata lungo le equazioni del moto, si annulla, segue dalle equazioni del moto per x e y e viene lasciata come verifica al lettore.

(c) L'equazione per i punti di equilibrio si ottiene ponendo $\dot{x} = \dot{y} \equiv 0$ e $\ddot{x} = \ddot{y} \equiv 0$ nelle equazioni (1) e (2). Otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 &= qE_0,\\ 0 &= -2mgy + qE_0, \end{aligned}$$

cosicchè è possibile avere punti di equilibrio solo nel caso in cui $E_0 = 0$. In tal caso, la condizione si riduce a $y = 0$. In altre parole, se $E_0 = 0$, i punti di equilibrio del sistema sono tutti e soli i punti della forma:

$$(x_{eq}, y_{eq}) = (x_0, 0), \qquad \text{con} \qquad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Tali punti sono i minimi assoluti del potenziale che, nel caso in cui $E_0 = 0$, si riduce a $U = mgy^2$. Si noti tuttavia che tali minimi non sono minimi isolati, quindi il criterio di Dirichlet non è applicabile. In effetti è facile vedere che tali punti di equilibrio sono tutti instabili: si noti infatti che scegliendo come dato iniziale $(x(0), y(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (x_0, 0, u_0, 0)$, il moto risultante, soluzione alle equazioni del moto, è $(x(t), y(t)) = (x_0 + u_0 t, 0)$, che, per quanto sia piccolo u_0, esce da ogni intorno prefissato in tempo finito.

(d) La soluzione della (1) con dati iniziali $(x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, u_0)$ è

$$x(t) = x_0 + u_0 t + \frac{qE_0}{2m} t^2. \tag{3}$$

(e) La soluzione della (2) si ricava per quadrature a partire dalla legge di conservazione di H_2, da cui otteniamo:

$$\dot{y} = \pm\sqrt{\frac{2(H_2 - mgy^2 + qE_0 y)}{m(1+4y^2)}}.$$

Il grafico qualitativo delle curve di livello si può ottenere a partire dal grafico qualitativo del potenziale efficace per il moto della y, che è semplicemente $U(y) = mgy^2 - qE_0 y$, cioè una parabola con concavità rivolta verso l'alto, con zeri in $y = 0$ e in $y = qE_0/(mg)$, e vertice in $y = qE_0/(2mg)$. Il grafico corrispondente delle curve di livello, al variare di H_2, consiste in curve chiuse concentriche centrate in $(y, \dot{y}) = (\frac{qE_0}{2mg}, 0)$. I moti della variabile y sono quindi tutti chiusi e periodici, di periodo

$$T_0 = 2\int_{y_-}^{y_+} \sqrt{\frac{m(1+4y^2)}{2(H_2 - mgy^2 + qE_0 y)}}\, dy, \tag{4}$$

dove $y_\pm$ sono le due radici di $H_2 - mgy^2 + qE_0 y = 0$. Si noti che in generale questo non vuol dire che il moto complessivo sia periodico: infatti, genericamente, il moto della variabile x non è periodico, come evidente dalla (3).

(f) Il moto complessivo è periodico se e solo se il moto della variabile x è banale, $x(t) \equiv x_0$, il che si verifica solo nel caso in cui $E_0 = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$. In tal caso, il moto complessivo è periodico di periodo T_0, dato dalla (4).

2. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{q} = p - q^2 \\ \dot{p} = 2pq - 2q^3. \end{cases}$$

   (a) Si riconosca che tale sistema è Hamiltoniano, e si calcoli l'Hamiltoniana corrispondente.

   (b) Scrivere e risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione generatrice di seconda specie $S(q, P)$, che mappi l'Hamiltoniana determinata sopra in $\tilde{H}(Q, P) = P^2/2$.

   (c) Si determini la trasformazione canonica associata ad $S(q, P)$ e se ne calcoli l'inversa.

   (d) Si usi la trasformazione canonica determinata sopra per risolvere le equazioni del moto in corrispondenza dei dati iniziali $q(0) = 1$, $p(0) = 4$. Si verifichi esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni del moto originali.

SOLUZIONE.

1. Per dimostrare che il sistema è Hamiltoniano, bisogna esibire una funzione $H = H(q, p)$ tale che

$$\begin{cases} p - q^2 = \frac{\partial H}{\partial p} \\ 2pq - 2q^3 = -\frac{\partial H}{\partial q}. \end{cases}$$

   Integrando la prima equazione troviamo: $H(q, p) = \frac{p^2}{2} - pq^2 + f(q)$, con f una funzione da determinare. Derivando tale espressione rispetto a q e usando la seconda equazione, troviamo: $2pq - 2q^3 = 2pq - f'(q)$, da cui $f(q) = q^4/2$, e quindi:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2} - pq^2 + \frac{q^4}{2}$$

   o, equivalentemente,

$$H(q, p) = \frac{1}{2}(p - q^2)^2.$$

2. L'equazione di Hamilton-Jacobi richiesta è

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial S}{\partial q} - q^2\Big)^2 = \frac{P^2}{2},$$

   da cui

$$\frac{\partial S}{\partial q} - q^2 = P.$$

   Integrando rispetto alla q troviamo una possibile soluzione per $S(q, P)$, nella forma

$$S(q, P) = Pq + \frac{q^3}{3}.$$

3. La trasformazione canonica associata ad $S(q,P)$ è tale che $p = \frac{\partial S}{\partial q} = P+q^2$ e $Q = \frac{\partial S}{\partial P} = q$, da cui:

$$\begin{cases} Q = q, \\ P = p - q^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} q = Q, \\ p = P + Q^2, \end{cases}$$

che sono le trasformazioni canoniche diretta e inversa associate a S.

4. Le equazioni di Eulero-Lagrange per la nuova Hamiltoniana $\tilde{H}(Q,P) = P^2/2$ sono

$$\begin{cases} \dot{Q} = P, \\ \dot{P} = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è $Q(t) = Q(0) + P(0)t$, $P(t) \equiv P(0)$. Usando l'espressione della trasformazione canonica diretta determinata sopra, troviamo che i dati iniziali per le (Q,P) corrispondenti a $q(0) = 1$, $p(0) = 4$, sono:

$$Q(0) = 1, \qquad P(0) = 3.$$

La soluzione richiesta nelle variabili (Q,P) è quindi:

$$Q(t) = 1 + 3t, \qquad P(t) \equiv 3.$$

Usando l'espressione della trasformazione canonica inversa determinata sopra, troviamo che la soluzione richiesta nelle variabili (q,p) è:

$$q(t) = 1 + 3t, \qquad p(t) = 3 + (1+3t)^2 = 4 + 6t + 9t^2.$$

Infine, rimpiazzando l'espressione trovata di $q(t)$ e $p(t)$ nelle equazioni del moto originali troviamo:

$$\begin{cases} 3 = 4 + 6t + 9t^2 - (1+3t)^2, \\ 6 + 18t = 2(4 + 6t + 9t^2)(1+3t) - 2(1+3t)^3. \end{cases}$$

È facile verificare che entrambe le identità sono identicamente soddisfatte (i dettagli sono lasciati al lettore).