

FM210 / MA

QUINTO SCRITTO [11-2-2019]

1. Due punti materiali A, B di massa m sono vincolati a muoversi in un piano verticale sotto l'effetto della forza di gravità, e sono tra loro collegati da una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla. Si usino come coordinate Lagrangiane: le coordinate (x, y) del centro di massa del sistema (misurate in un sistema di riferimento in cui l'asse x è orizzontale, e l'asse y verticale orientato verso l'altro); la distanza ξ tra A e B ; l'angolo θ che il segmento AB forma con l'asse x .
 - (a) Scrivere la Lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, \xi, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\xi}, \dot{\theta})$ del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
 - (b) Riconoscere che il sistema ammette due variabili cicliche. Si identifichino le costanti del moto ad esse associate.
 - (c) Si usi il metodo di Routh per ridurre di due il numero di gradi di libertà del sistema.
 - (d) Si risolvano le equazioni del moto definite dalla Lagrangiana ridotta, o esplicitamente, ove possibile, o implicitamente con il metodo di integrazione per quadrature. Se ne discuta la natura qualitativa dei moti al variare dei dati iniziali.

2. Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = -q\sqrt{1 + \dot{q}^2}.$$

- (a) Calcolare l'Hamiltoniana $H(q, p)$ associata a \mathcal{L} , e scrivere le equazioni di Hamilton corrispondenti.
- (b) Scrivere e risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione generatrice $S(q, P)$ che mappi l'Hamiltoniana H in $\tilde{H}(Q, P) = P$. [Per la risoluzione dell'equazione, può essere utile notare che una possibile primitiva di $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ è

$$F(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\log(x + \sqrt{x^2 - 1}).]$$

- (c) Si determini la trasformazione canonica

$$\begin{cases} Q = Q(q, p), \\ P = P(q, p), \end{cases}$$

associata alla funzione generatrice ricavata al punto precedente, e se ne calcoli l'inversa.

- (d) Scrivere e risolvere le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili Q, P .
- (e) Usare la trasformazione canonica precedente per risolvere le equazioni del moto, per dati iniziali $q(0) = 1, p(0) = 0$. Verificare esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni di Hamilton originali.