FM210 / MA

Quarto Scritto [21-1-2019]

1. Tre punti materiali A, B, C di massa m sono vincolati a muoversi in un piano verticale Π di origine O in modo che le distanze OA, OB, BC, AC siano fisse e tutte eguali a ℓ. Il piano Π è libero di ruotare intorno all'asse z ma non in altre direzioni. Inoltre il punto C è vincolato all'asse z.

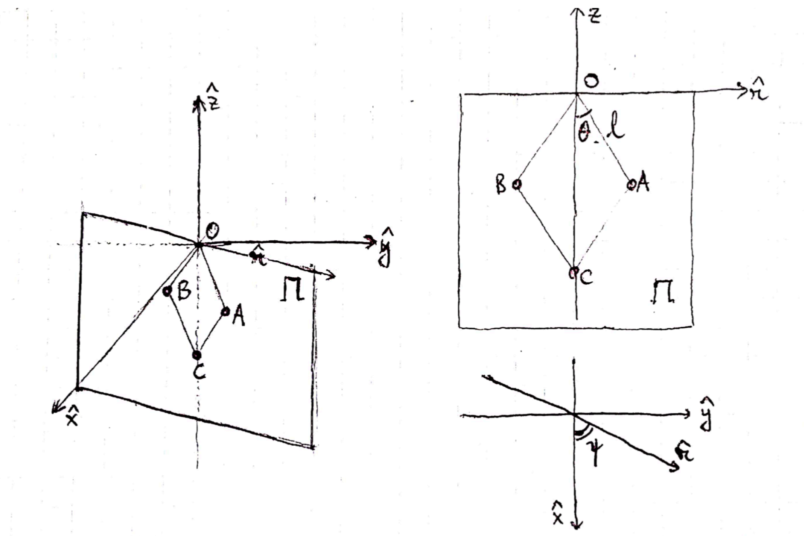

Figura 1: Il sistema di punti materiali vincolato descritto nel testo.

Tutti i vincoli sono da supporsi ideali. Si usino come coordinate Lagrangiane l'angolo θ che il segmento OA forma con l'asse z e l'angolo ψ che il piano Π forma con l'asse x.

(a) Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.

(b) Riconoscere che il sistema ammette una variabile ciclica. Si identifichi la costante del moto ad essa associata, e si verifichi che essa corrisponde alla proiezione del momento angolare totale del sistema (rispetto all'origine O) lungo l'asse z.

(c) Si usi il metodo di Routh per ridurre di uno il numero di gradi di libertà del sistema.

(d) Si risolva per quadrature il sistema definito dalla Lagrangiana ridotta e se ne discuta la natura qualitativa dei moti corrispondenti.

2. Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{4}q\dot{q}^2 - \frac{1}{q}$$

per $q > 0$.

(a) Calcolare l'Hamiltoniana $H(q,p)$ associata a $\mathcal{L}$, e scrivere le equazioni di Hamilton corrispondenti.

(b) Scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione generatrice $S(q,P)$ che mappi l'Hamiltoniana H in $\tilde{H}(Q,P) = P$.

(c) Si determini la trasformazione canonica

$$\begin{cases} Q = Q(q,p), \\ P = P(q,p), \end{cases}$$

associata alla funzione generatrice ricavata al punto precedente.

(d) Scrivere e risolvere le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili Q, P.

(e) Usare la trasformazione canonica precedente per risolvere le equazioni del moto, per dati iniziali $q(0) = 1$, $p(0) = 0$. Verificare esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni di Hamilton originali.

Nota: per ricavare la soluzione in forma analitica, può essere utile osservare che la radice reale dell'equazione $x^3 + 3x - a = 0$, $a \in \mathbb{R}$, è

$$x = f(a) := \left(\sqrt{\frac{a^2}{4} + 1} + \frac{a}{2}\right)^{1/3} - \left(\sqrt{\frac{a^2}{4} + 1} - \frac{a}{2}\right)^{1/3}.$$