FM210 / MA

Quarto Scritto [21-1-2019]

1. Tre punti materiali A, B, C di massa m sono vincolati a muoversi in un piano verticale Π di origine O in modo che le distanze OA, OB, BC, AC siano fisse e tutte eguali a ℓ. Il piano Π è libero di ruotare intorno all'asse z ma non in altre direzioni. Inoltre il punto C è vincolato all'asse z.

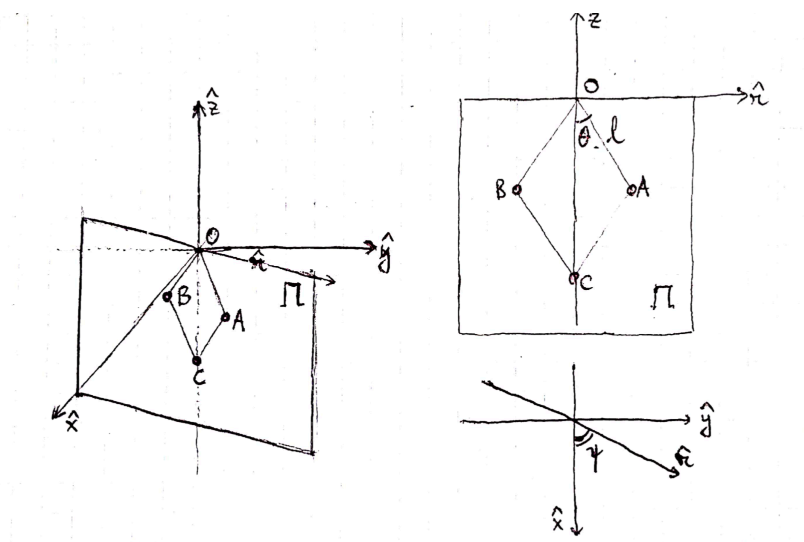

Figura 1: Il sistema di punti materiali vincolato descritto nel testo.

Tutti i vincoli sono da supporsi ideali. Si usino come coordinate Lagrangiane l'angolo θ che il segmento OA forma con l'asse z e l'angolo ψ che il piano Π forma con l'asse x.

(a) Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.

(b) Riconoscere che il sistema ammette una variabile ciclica. Si identifichi la costante del moto ad essa associata, e si verifichi che essa corrisponde alla proiezione del momento angolare totale del sistema (rispetto all'origine O) lungo l'asse z.

(c) Si usi il metodo di Routh per ridurre di uno il numero di gradi di libertà del sistema.

(d) Si risolva per quadrature il sistema definito dalla Lagrangiana ridotta e se ne discuta la natura qualitativa dei moti corrispondenti.

SOLUZIONE.

(a) Le coordinate dei punti A, B, C nelle variabili θ, ψ sono:

$$A = \ell(\sin\theta\cos\psi, \sin\theta\sin\psi, -\cos\theta),$$
$$B = \ell(-\sin\theta\cos\psi, -\sin\theta\sin\psi, -\cos\theta),$$
$$C = (0, 0, -2\ell\cos\theta).$$

Le velocità corrispondenti sono:

$$\dot{A} = \ell\dot{\theta}(\cos\theta\cos\psi, \cos\theta\sin\psi, \sin\theta) + \ell\sin\theta\dot{\psi}(-\sin\psi, \cos\psi, 0),$$
$$\dot{B} = \ell\dot{\theta}(-\cos\theta\cos\psi, -\cos\theta\sin\psi, \sin\theta) - \ell\sin\theta\dot{\psi}(-\sin\psi, \cos\psi, 0),$$
$$\dot{C} = 2\ell\dot{\theta}(0, 0, \sin\theta).$$

L'energia cinetica è quindi:

$$T = \frac{m}{2}(|\dot{A}|^2 + |\dot{B}|^2 + |\dot{C}|^2) = m\ell^2\big[\dot{\theta}^2(1 + 2\sin^2\theta) + \sin^2\theta\dot{\psi}^2\big].$$

L'energia potenziale è (chiamando z_A la terza componente del vettore A, etc.):

$$T = mg(z_A + z_B + z_C) = -4mg\ell\cos\theta.$$

Quindi la Lagrangiana del sistema, nelle variabili $(\theta, \psi, \dot{\theta}, \dot{\psi})$, è

$$\mathcal{L} = m\ell^2\big[\dot{\theta}^2(1 + 2\sin^2\theta) + \sin^2\theta\dot{\psi}^2\big] + 4mg\ell\cos\theta,$$

le cui equazioni di EL sono:

$$\frac{d}{dt}\Big[2m\ell^2\dot{\theta}(1 + 2\sin^2\theta)\Big] = 2m\ell^2\sin\theta\cos\theta(2\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) - 4mg\ell\sin\theta,$$
$$\frac{d}{dt}\Big[2m\ell^2\sin^2\theta\dot{\psi}\Big] = 0.$$

(b) La variabile ψ è ciclica e, come evidente dalla seconda equazione di EL, la costante del moto ad essa associata è

$$J = 2m\ell^2\sin^2\theta\dot{\psi}.$$

È facile vedere che tale grandezza altri non è che la proiezione L_z sull'asse z del momento angolare totale del sistema. Infatti, chiamando (x_A, y_A, z_A), $(\dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{z}_A)$ le componenti dei vettori A, $\dot{A}$, etc., abbiamo:

$$\begin{aligned} L_z &= m(x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A) + m(x_B\dot{y}_B - y_B\dot{x}_B) + m(x_C\dot{y}_C - y_C\dot{x}_C) \\ &= m(\ell^2\sin^2\theta\dot{\psi}) + m(\ell^2\sin^2\theta\dot{\psi}) + (0), \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

(c) Secondo il metodo di Routh, la Lagrangiana ridotta del sistema è (chiamando $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ la Lagrangiana originale, indipendente da ψ, e scrivendo $\dot{\psi}$ in termini della grandezza conservata J, $\dot{\psi} = \frac{J}{2m\ell^2\sin^2\theta}$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R(\theta, \dot{\theta}) &= \mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, \frac{J}{2m\ell^2\sin^2\theta}) - J\cdot\frac{J}{2m\ell^2\sin^2\theta} \\ &= m\ell^2\dot{\theta}^2(1 + 2\sin^2\theta) - \frac{J^2}{4m\ell^2\sin^2\theta} + 4mg\ell\cos\theta \\ &\equiv m\ell^2\dot{\theta}^2(1 + 2\sin^2\theta) - V_{eff}(\theta), \end{aligned}$$

dove

$$V_{eff}(\theta) = \frac{J^2}{4m\ell^2 \sin^2\theta} - 4mg\ell\cos\theta.$$

L'equazione del moto corrispondente è

$$\frac{d}{dt}\left[2m\ell^2\dot\theta(1+2\sin^2\theta)\right] = 4m\ell^2\dot\theta^2\sin\theta\cos\theta - V'_{eff}(\theta).$$

(d) Il sistema descritto dalla Lagrangiana ridotta ammette come grandezza conservata l'energia meccanica:

$$E = m\ell^2\dot\theta^2(1+2\sin^2\theta) + V_{eff}(\theta).$$

Usando tale legge di conservazione possiamo integrare il sistema per quadrature, ricavando l'equazione delle curve di livello nel piano delle fasi ridotto $(\theta, \dot\theta)$:

$$\dot\theta = \pm\sqrt{\frac{E - V_{eff}(\theta)}{m\ell^2(1+2\sin^2\theta)}}.$$

Illustriamo graficamente il comportamento qualitativo del potenziale efficace e delle curve di livello nelle figure 2 e 3, nel caso in cui $J \neq 0$ (il caso $J = 0$ è lasciato al lettore):

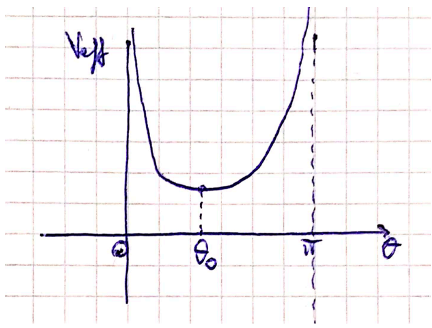

Figura 2: Il grafico qualitativo del potenziale efficace $V_{eff}(\theta)$.

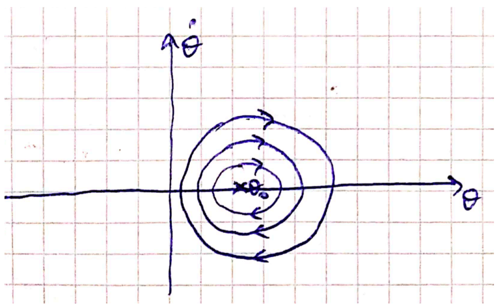

Figura 3: Grafico qualitativo delle curve di livello al variare di E nel caso in cui $J \neq 0$.

Dal grafico delle curve di livello risulta evidente che tutti i moti siano periodici. La soluzione per quadrature per il ramo positivo di una delle curve di livello non banali del sistema è:

$$t = \int_{\theta_-}^{\theta(t)} \sqrt{\frac{m\ell^2(1 + 2\sin^2\theta)}{E - V_{eff}(\theta)}} d\theta,$$

dove θ_- è il punto piccolo dei due punti di inversione a energia E.

2. Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{4}q\dot{q}^2 - \frac{1}{q}$$

per $q > 0$.

(a) Calcolare l'Hamiltoniana $H(q,p)$ associata a $\mathcal{L}$, e scrivere le equazioni di Hamilton corrispondenti.

(b) Scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione generatrice $S(q,P)$ che mappi l'Hamiltoniana H in $\tilde{H}(Q,P) = P$.

(c) Si determini la trasformazione canonica

$$\begin{cases} Q = Q(q,p), \\ P = P(q,p), \end{cases}$$

associata alla funzione generatrice ricavata al punto precedente.

(d) Scrivere e risolvere le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili Q, P.

(e) Usare la trasformazione canonica precedente per risolvere le equazioni del moto, per dati iniziali $q(0) = 1$, $p(0) = 0$. Verificare esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni di Hamilton originali.

SOLUZIONE.

(a) Il momento coniugato è

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = q\dot{q}/2 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{q} = 2p/q.$$

L'Hamiltoniana associata a $\mathcal{L}$ è quindi

$$H = p \cdot \frac{2p}{q} - \partial L\big(q, \frac{2p}{q}\big) = \frac{p^2+1}{q},$$

le cui equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot{q} = 2p/q \\ \dot{p} = (p^2+1)/q^2 \end{cases}$$

(b) L'equazione di Hamilton-Jacobi richiesta è

$$(\partial_q S)^2 + 1 = qP \quad \Longrightarrow \quad \partial_q S = \pm\sqrt{qP-1}.$$

Scegliendo la determinazione positiva otteniamo come possibile soluzione

$$S(q,P) = \frac{2}{3P}(qP-1)^{3/2}.$$

(c) La trasformazione associata alla funzione S ricavata al punto precedente è

$$p=\sqrt{qP-1}, \qquad Q=-\frac{2}{3P^2}(qP-1)^{3/2}+\frac{q}{P}\sqrt{qP-1},$$

che si può invertire in:

$$Q=\frac{q^2p(p^2/3+1)}{(p^2+1)^2}, \qquad P=\frac{p^2+1}{q}.$$

(d) Le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili sono

$$\dot{Q}=1, \quad \dot{P}=0,$$

la cui soluzione è

$$Q(t)=Q(0)+t, \quad P(t)=P(0).$$

(e) I dati iniziali $q(0)=1$, $p(0)=0$ corrispondono a $Q(0)=0$, $P(0)=1$. La soluzione $q(t),p(t)$ soddisfa quindi:

$$t=-\frac{2}{3}p^3(t)+q(t)p(t), \qquad 1=\frac{p^2(t)+1}{q(t)}. \tag{1}$$

Sostituendo la seconda nella prima troviamo che $p=p(t)$ soddisfa l'equazione:

$$p^3+3p=3t. \tag{2}$$

Tale equazione ammette un'unica soluzione reale, uguale a

$$p(t)=\Big(\sqrt{\frac{9t^2}{4}+1}+\frac{3t}{2}\Big)^{1/3}-\Big(\sqrt{\frac{9t^2}{4}+1}-\frac{3t}{2}\Big)^{1/3}, \tag{3}$$

che soddisfa (come si verifica derivando la (1) rispetto al tempo)

$$3p^2\dot{p}+3\dot{p}=3 \quad \Longrightarrow \quad \dot{p}=\frac{1}{p^2+1}. \tag{4}$$

Infine, la soluzione per la $q(t)$ si ottiene in termini di (3), usando la seconda delle (1): $q(t)=p^2(t)+1$.

Per verificare che la soluzione trovata risolve le equazioni di Hamilton originali, iniziamo con l'osservare che, moltiplicando il secondo membro della seconda delle (4) per $1=\frac{(p^2(t)+1)^2}{q^2(t)}$ (vedi la seconda delle (1)) si ottiene

$$\dot{p}=\frac{p^2+1}{q^2},$$

che è la seconda equazione di Hamilton. Inoltre, derivando rispetto al tempo l'equazione $q(t)=p^2(t)+1$ troviamo $\dot{q}=2p\dot{p}$, cosicché, usando la seconda delle (4), troviamo

$$\dot{q}=\frac{2p}{p^2+1}=\frac{2p}{q}, \tag{5}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo usato ancora una volta $q=p^2+1$. La (5) è, come desiderato, la prima equazione di Hamilton.