FM210 / MA

Terzo Scritto [13-9-2018]

1. Un sistema meccanico è costituito da una sbarra rettilinea, omogenea, pesante, di massa M e lunghezza ℓ, vincolata a muoversi su un piano verticale, in modo tale che l'estremo A appartenga a una guida parabolica di equazione $y = \frac{x^2}{2\ell}$. Oltre alla forza gravitazionale, il sistema è soggetto a una forza elastica che agisce su B, della forma $\vec{F} = -k\,\overrightarrow{B'B}$, dove B' è il punto dell'asse verticale passante per O con la stessa ordinata di B (i.e., è la proiezione ortogonale di B sull'asse verticale passante per O).

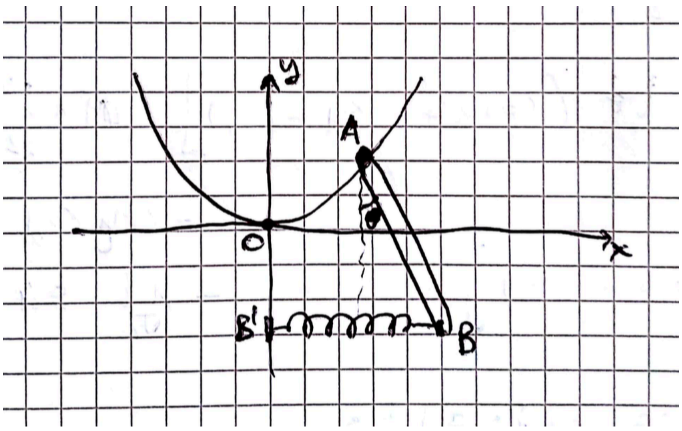

Figura 1: Il sistema di due aste vincolato descritto nel testo.

Tutti i vincoli sono supposti ideali. Si usino come coordinate Lagrangiane l'ascissa x del punto A e l'angolo θ mostrato in figura.

(a) Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.

(b) Riconoscere che i punti $(x, \theta) = (0, 0), (0, \pi)$ sono punti di equilibrio, e studiarne la stabilità, al variare di k.

(c) Determinare gli eventuali altri punti di equilibrio, al variare di k, e (**facoltativo**) studiarne la stabilità.

(d) Si scelga un punto di equilibrio stabile e si ricavino le equazioni del moto linearizzate attorno a tale punto di equilibrio (equazione delle piccole oscillazioni). Si determinino le frequenze proprie delle piccole oscillazioni.

2. Si consideri il sistema Hamiltoniano di Hamiltoniana

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 - p_1 p_2 + \frac{1}{2}q_1^2 + q_2^2 + q_1 q_2.$$

   (a) Scrivere le equazioni di Hamilton.

   (b) Determinare la trasformazione canonica tale che

$$Q_1 = q_1 + q_2, \qquad Q_2 = q_2$$

   e calcolarne l'inversa, identificando la funzione generatrice di seconda specie ad essa associata.

   (c) Usare la trasformazione canonica precedente per risolvere le equazioni del moto, per dati iniziali qualsiasi. Verificare esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni di Hamilton originali.