Corsi di laurea in Matematica e Fisica - Anno Accademico 2017/18

FM210 / MA

Terzo Scritto [13-9-2018]

1. Un sistema meccanico è costituito da una sbarra rettilinea, omogenea, pesante, di massa M e lunghezza ℓ, vincolata a muoversi su un piano verticale, in modo tale che l'estremo A appartenga a una guida parabolica di equazione $y = \frac{x^2}{2\ell}$. Oltre alla forza gravitazionale, il sistema è soggetto a una forza elastica che agisce su B, della forma $\vec{F} = -k\,\overrightarrow{B'B}$, dove B' è il punto dell'asse verticale passante per O con la stessa ordinata di B (i.e., è la proiezione ortogonale di B sull'asse verticale passante per O).

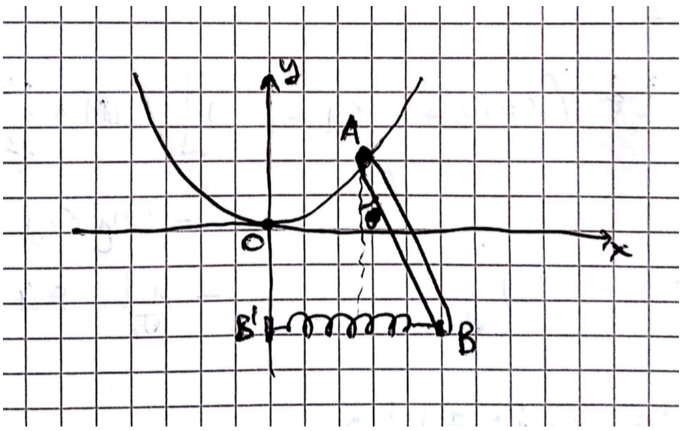

Figura 1: Il sistema di due aste vincolato descritto nel testo.

Tutti i vincoli sono supposti ideali. Si usino come coordinate Lagrangiane l'ascissa x del punto A e l'angolo θ mostrato in figura.

(a) Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.

(b) Riconoscere che i punti $(x, \theta) = (0, 0), (0, \pi)$ sono punti di equilibrio, e studiarne la stabilità, al variare di k.

(c) Determinare gli eventuali altri punti di equilibrio, al variare di k, e (**facoltativo**) studiarne la stabilità.

(d) Si scelga un punto di equilibrio stabile e si ricavino le equazioni del moto linearizzate attorno a tale punto di equilibrio (equazione delle piccole oscillazioni). Si determinino le frequenze proprie delle piccole oscillazioni.

SOLUZIONE.

(a) Per scrivere la Lagrangiana del sistema occorre calcolare l'energia cinetica e potenziale del sistema nella coordinata Lagrangiane θ assegnata.

Energia cinetica. Grazie al teorema di König, l'energia cinetica dell'asta è uguale alla somma dell'energia cinetica traslazionale associata al moto del centro di massa e dell'energia cinetica di rotazione attorno al centro di massa. Il punto A ha coordinate $\mathbf{x}_A = (x, \frac{x^2}{2\ell})$, mentre il punto B ha coordinate $\mathbf{x}_B = (x + \ell \sin\theta, \frac{x^2}{2\ell} - \ell\cos\theta)$, cosicché il centro di massa G ha coordinate $\mathbf{x}_G = (x + \frac{\ell}{2}\sin\theta, \frac{x^2}{2\ell} - \frac{\ell}{2}\cos\theta)$. La velocità del centro di massa è quindi $\dot{\mathbf{x}}_G = \dot{x}(1, \frac{x}{\ell}) + \frac{\ell}{2}\dot\theta(\cos\theta, \sin\theta)$. Quindi l'energia cinetica dell'asta è

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{M}{2}|\dot{\mathbf{x}}_G|^2 + \frac{1}{2}I_G\dot\theta^2 = \\
&= \frac{M}{2}\Big[\dot{x}^2\big(1 + \frac{x^2}{\ell^2}\big) + \frac{\ell^2}{4}\dot\theta^2 + \ell\dot{x}\dot\theta(\cos\theta + \frac{x}{\ell}\sin\theta)\Big] + \frac{1}{2}\frac{M\ell^2}{12}\dot\theta^2 \\
&= \frac{M}{2}\dot{x}^2\big(1 + \frac{x^2}{\ell^2}\big) + M\frac{\ell^2}{6}\dot\theta^2 + \frac{M}{2}\ell\dot{x}\dot\theta(\cos\theta + \frac{x}{\ell}\sin\theta),
\end{aligned}
$$

dove il termine $\frac{1}{2}I_G\dot\theta^2$ rappresenta l'energia cinetica di rotazione attorno al centro di massa, e abbiamo usato che $I_G = \frac{1}{12}M\ell^2$.

Energia potenziale. L'energia potenziale è la somma dell'energia potenziale gravitazionale dell'asta più l'energia potenziale elastica della molla:

$$
\begin{aligned}
U &= Mg\big(\frac{x^2}{2\ell} - \frac{\ell}{2}\cos\theta\big) + \frac{1}{2}k(x + \ell\sin\theta)^2 \qquad (1)\\
&= \frac{1}{2}\big(k + \frac{Mg}{\ell}\big)x^2 + k\ell x\sin\theta - \frac{Mg\ell}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}k\ell^2\sin^2\theta,
\end{aligned}
$$

dove abbiamo usato che: la coordinata verticale di $\mathbf{x}_G$ è $\frac{x^2}{2\ell} - \frac{\ell}{2}\cos\theta$; la coordinata orizzontale di $\mathbf{x}_B$ è $x + \ell\sin\theta$.

La Lagrangiana del sistema è uguale all'energia cinetica meno l'energia potenziale. Quindi,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(x, \theta, \dot{x}, \dot\theta) = \frac{M}{2}\dot{x}^2\big(1 + \frac{x^2}{\ell^2}\big) + M\frac{\ell^2}{6}\dot\theta^2 + \frac{M}{2}\ell\dot{x}\dot\theta(\cos\theta + \frac{x}{\ell}\sin\theta) \\
-\frac{1}{2}\big(k + \frac{Mg}{\ell}\big)x^2 - k\ell x\sin\theta + \frac{Mg\ell}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}k\ell^2\sin^2\theta,
\end{aligned}
$$

cosicché le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big[M\dot{x}\big(1 + \frac{x^2}{\ell^2}\big) + \frac{M}{2}\ell\dot\theta(\cos\theta + \frac{x}{\ell}\sin\theta)\Big] = \\
&\qquad = M\dot{x}^2\frac{x}{\ell^2} + \frac{M}{2}\dot{x}\dot\theta\sin\theta - \big(k + \frac{Mg}{\ell}\big)x - k\ell\sin\theta. \\
&\frac{d}{dt}\Big[M\frac{\ell^2}{3}\dot\theta + \frac{M}{2}\ell\dot{x}(\cos\theta + \frac{x}{\ell}\sin\theta)\Big] = \\
&\qquad = \frac{M}{2}\ell\dot{x}\dot\theta(-\sin\theta + \frac{x}{\ell}\cos\theta) - k\ell x\cos\theta - \frac{Mg\ell}{2}\sin\theta - k\ell^2\sin\theta\cos\theta.
\end{aligned}
$$

Calcolando esplicitamente le derivate a membro di sinistra, e dividendo per ℓ la seconda equazione, troviamo:

$$
\begin{aligned}
&M\ddot{x}\big(1+\frac{x^2}{\ell^2}\big)+\frac{M}{2}\ell\ddot{\theta}(\cos\theta+\frac{x}{\ell}\sin\theta)+\frac{M}{2}\ell\dot{\theta}^2(-\sin\theta+\frac{x}{\ell}\cos\theta)=\\
&\qquad=-M\dot{x}^2\frac{x}{\ell^2}-\big(k+\frac{Mg}{\ell}\big)x-k\ell\sin\theta.\\
&M\frac{\ell}{3}\ddot{\theta}+\frac{M}{2}\ddot{x}(\cos\theta+\frac{x}{\ell}\sin\theta)+\frac{M}{2\ell}\dot{x}^2\sin\theta=\\
&\qquad=-kx\cos\theta-\frac{Mg}{2}\sin\theta-k\ell\sin\theta\cos\theta.
\end{aligned}
$$

(b) Il sistema di equazioni per i punti di equilibrio è

$$
\begin{cases}\big(k+\frac{Mg}{\ell}\big)x+k\ell\sin\theta=0,\\ kx\cos\theta+\frac{Mg}{2}\sin\theta+k\ell\sin\theta\cos\theta=0,\end{cases}\tag{2}
$$

che è evidentemente risolto da $(x,\theta)=(0,0)$ e da $(x,\theta)=(0,\pi)$, il che dimostra che tali punti sono di equilibrio.
Per studiare la stabilità di tali punti andiamo a considerare la matrice Hessiana del potenziale $U=U(x,\theta)$ in eq.(1) calcolata nei punti $(0,0)$ e $(0,\pi)$. Si ha (le potenze di ℓ inverse negli elementi $12, 21$ e 22 della matrice sono scelti in modo tale che tutti gli elementi della matrice abbiano le stesse dimensioni fisiche):

$$
\mathcal{H}(x,\theta):=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2U}{\partial x^2} & \frac{1}{\ell}\frac{\partial^2U}{\partial x\partial\theta}\\ \frac{1}{\ell}\frac{\partial^2U}{\partial x\partial\theta} & \frac{1}{\ell^2}\frac{\partial^2U}{\partial\theta^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k+\frac{Mg}{\ell} & k\cos\theta\\ k\cos\theta & -k\frac{x}{\ell}\sin\theta+\frac{Mg}{2\ell}\cos\theta+k(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\end{pmatrix}.
$$

Calcolando l'Hessiana in $(0,0)$ troviamo

$$
\mathcal{H}(0,0)=\begin{pmatrix}k+\frac{Mg}{\ell} & k\\ k & \frac{Mg}{2\ell}+k\end{pmatrix},
$$

che è definita positiva: di conseguenza, $(0,0)$ è stabile per ogni scelta di $k>0$. Se invece calcoliamo l'Hessiana in $(0,\pi)$ troviamo:

$$
\mathcal{H}(0,\pi)=\begin{pmatrix}k+\frac{Mg}{\ell} & -k\\ -k & -\frac{Mg}{2\ell}+k\end{pmatrix},
$$

che è definita positiva se e solo se il suo determinante è positivo, i.e., se

$$
-\frac{1}{2}\Big(\frac{Mg}{\ell}\Big)^2+\frac{k}{2}\frac{Mg}{\ell}>0.
$$

Quindi, se $k>Mg/\ell$, il punto di equilibrio $(0,\pi)$ è stabile. Viceversa, se $k<Mg/\ell$ la matrice Hessiana ha un autovalore positivo e uno negativo, e il punto di equilibrio è instabile.

(c) Per identificare algtri punti di equilibrio oltre $(0,0)$ e $(0,\pi)$, studiamo il sistema (2) per $\sin\theta\neq 0$. In tal caso, rimpiazzando la soluzione della prima equazione nella seconda, e dividendo per $\sin\theta$, troviamo:

$$
k\Big(1-\frac{k}{k+Mg/\ell}\Big)\cos\theta+\frac{Mg}{2\ell}=0\quad\Leftrightarrow\quad\cos\theta=-\frac{1}{2}\Big(1+\frac{Mg}{\ell k}\Big),
$$

che ammette due soluzioni distinte se e solo se $\frac{Mg}{\ell k} < 1$, i.e., $k > Mg/\ell$. In tal caso, i due punti di equilibrio aggiuntivi, oltre $(0,0)$ e $(0,\pi)$, sono

$$(x,\theta) = \Big(\pm \frac{\ell}{1+\beta} \sin\alpha, \pi \pm \alpha \Big),$$

dove $\beta = \frac{Mg}{\ell k}$ e $\alpha = \arccos \frac{1+\beta}{2}$.

(d) Studiamo le piccole oscillazioni attorno a $(0,0)$. Le equazioni del moto linearizzate attorno a tale punto di equilibrio sono:

$$M\ddot{x} + \frac{M}{2}\ell\ddot{\theta} = -\big(k + \frac{Mg}{\ell}\big)x - k\ell\theta$$
$$M\frac{\ell}{3}\ddot{\theta} + \frac{M}{2}\ddot{x} = -kx - \big(k + \frac{Mg}{2\ell}\big)\ell\theta.$$

In forma matriciale tale sistema di equazioni prende la forma:

$$M\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{v}} = -k\begin{pmatrix} 1+\beta & 1 \\ 1 & 1+\beta/2 \end{pmatrix} \mathbf{v},$$

dove $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ \ell\theta \end{pmatrix}$ e, di nuovo, $\beta = \frac{Mg}{\ell k}$. Le frequenze proprie delle piccole oscillazioni sono $\omega_\pm = \sqrt{\lambda_\pm}$, dove $\lambda_\pm$ sono le due soluzioni del seguente polinomio caratteristico:

$$\det\left[k\begin{pmatrix} 1+\beta & 1 \\ 1 & 1+\beta/2 \end{pmatrix} - \lambda M\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}\right] = 0.$$

Risolvendo tale equazione, si trova:

$$\lambda_\pm = \omega_0^2\Big[2 + 5\beta \pm \sqrt{4 + 2\beta + 19\beta^2}\Big],$$

dove $\omega_0 = \sqrt{k/M}$.

2. Si consideri il sistema Hamiltoniano di Hamiltoniana

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 - p_1 p_2 + \frac{1}{2}q_1^2 + q_2^2 + q_1 q_2.$$

   (a) Scrivere le equazioni di Hamilton.

   (b) Determinare la trasformazione canonica tale che

$$Q_1 = q_1 + q_2, \qquad Q_2 = q_2$$

   e calcolarne l'inversa, identificando la funzione generatrice di seconda specie ad essa associata.

   (c) Usare la trasformazione canonica precedente per risolvere le equazioni del moto, per dati iniziali qualsiasi. Verificare esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni di Hamilton originali.

SOLUZIONE.

(a) Le equazioni di Hamilton prendono la forma:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = 2p_1 - p_2 \\
\dot{q}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = p_2 - p_1 \\
\dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -q_1 - q_2 \\
\dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -2q_2 - q_1.
\end{aligned}$$

(b) Cerchiamo la funzione generatrice di seconda specie $S(q_1, q_2, P_1, P_2)$ per la trasformazione canonica richiesta: si ha

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1}, \qquad Q_2 = \frac{\partial S}{\partial P_2}, \qquad p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \qquad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2}.$$

Imponendo che $Q_1 = q_1 + q_2$ e $Q_2 = q_2$ troviamo

$$\frac{\partial S}{\partial P_1} = q_1 + q_2, \qquad \frac{\partial S}{\partial P_2} = q_2.$$

Quindi, una possibile scelta per S è semplicemente:

$$S(q_1, q_2, P_1, P_2) = P_1(q_1 + q_2) + P_2 q_2,$$

che è associata alla trasformazione

$$Q_1 = q_1 + q_2, \qquad Q_2 = q_2, \qquad p_1 = P_1, \qquad p_2 = P_1 + P_2.$$

La trasformazione diretta è quindi

$$Q_1 = q_1 + q_2, \qquad Q_2 = q_2, \qquad P_1 = p_1, \qquad P_2 = p_2 - p_1,$$

mentre l'inversa è

$$q_1 = Q_1 - Q_2, \qquad q_2 = Q_2, \qquad p_1 = P_1, \qquad p_2 = P_1 + P_2.$$

(c) Usando la trasformazione canonica inversa otteniamo l'Hamiltoniana nelle nuove variabili:

$$\widetilde{H}(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = H(Q_1 - Q_2, Q_2, P_1, P_1 + P_2).$$

Svolgendo l'espressione troviamo:

$$\widetilde{H}(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = \frac{1}{2}\Big(Q_1^2 + Q_2^2 + P_1^2 + P_2^2\Big),$$

le cui equazioni del moto sono:

$$\dot{Q}_1 = P_1, \qquad \dot{Q}_2 = P_2, \qquad \dot{P}_1 = -Q_1, \qquad \dot{P}_2 = -Q_2.$$

Tali equazioni altro non sono che le equazioni di due oscillatori armonici disaccoppiati, la cui soluzione è

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= Q_1(0)\cos t + P_1(0)\sin t, & P_1(t) &= -Q_1(0)\sin t + P_1(0)\cos t,\\ Q_2(t) &= Q_2(0)\cos t + P_2(0)\sin t, & P_2(t) &= -Q_2(0)\sin t + P_2(0)\cos t. \end{aligned}$$

Usando la trasformazione canonica inversa, possiamo quindi ottenere la soluzione nelle variabili originali:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= q_1(0)\cos t + (2p_1(0) - p_2(0))\sin t,\\ p_1(t) &= -(q_1(0) + q_2(0))\sin t + p_1(0)\cos t,\\ q_2(t) &= q_2(0)\cos t + (p_2(0) - p_1(0))\sin t,\\ p_2(t) &= -(q_1(0) + 2q_2(0))\sin t + p_2(0)\cos t. \end{aligned}$$

La verifica che tali soluzioni risolvono le equazioni originali è elementare e viene lasciata al lettore.