

FM210 / MA

PRIMO SCRITTO [21-6-2018]

1. Si consideri il sistema meccanico bidimensionale

$$\ddot{\mathbf{x}} = (|\mathbf{x}|^4 - 1)\mathbf{x},$$

per $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

- Si identifichino due integrali primi del moto e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.
- Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità.
- Si descriva il moto in coordinate polari ρ, θ e si scriva l'equazione del moto per la variabile radiale. Si discuta la natura qualitativa del moto radiale al variare dei dati iniziali. In particolare: si disegni il grafico delle traiettorie nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$ ('curve di livello') e si discuta per quali dati iniziali il moto è limitato o illimitato.
- Si esibisca un dato iniziale per cui il moto complessivo è periodico non banale e se ne calcoli il periodo (eventualmente in termini di un integrale definito).
- Si esibisca un dato iniziale per cui il moto è illimitato e si stabilisca se il tempo di fuga all'infinito è finito o infinito.

SOLUZIONE.

- La forza assegnata è centrale, quindi il sistema ammette come grandezze conservate l'energia meccanica E e il momento angolare L (dato che il sistema è bidimensionale, il momento angolare è una grandezza scalare, che, nell'interpretazione vettoriale, corrisponde alla componente del vettore momento angolare ortogonale al piano su cui si svolge il moto). In formule:

$$E = \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{x}}|^2 + V(|\mathbf{x}|),$$

dove $V(\rho)$ è tale che $-V'(\rho) = \rho^5 - \rho$, e può quindi essere scelto uguale a $V(\rho) = \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^6}{6}$; inoltre,

$$L = x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1.$$

Verifichiamo la conservazione di E :

$$\dot{E} = \dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}(1 - |\mathbf{x}|^4),$$

che è nullo per l'equazione del moto. Verifichiamo ora la conservazione di L :

$$\dot{L} = \dot{x}_1 \dot{x}_2 + x_1 \ddot{x}_2 - \dot{x}_2 \dot{x}_1 - x_2 \ddot{x}_1 = x_1(|\mathbf{x}|^4 - 1)x_2 - x_2(|\mathbf{x}|^4 - 1)x_1 = 0,$$

dove nella seconda identità abbiamo usato l'equazione del moto.

- (b) I punti di equilibrio del sistema sono tutti e soli i valori di \mathbf{x} per cui si annulla il membro di destra dell'equazione del moto, i.e., $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e i punti tali che $|\mathbf{x}| = 1$. L'origine è un minimo locale non degenero del potenziale, ed è quindi stabile per il teorema di Dirichlet. I punti con $|\mathbf{x}| = 1$ sono tutti massimi del potenziale, e sono quindi instabili.
- (c) In coordinate polari, il moto è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\ddot{\rho} = -V'_{eff}(\rho), \quad \dot{\theta} = \frac{L}{\rho^2},$$

dove

$$V_{eff}(\rho) = -\frac{\rho^6}{6} + \frac{\rho^2}{2} + \frac{L}{2\rho^2}.$$

Nel caso in cui $L = 0$, il moto si svolge lungo una retta: se chiamo x la coordinata cartesiana lungo tale retta il moto è lo stesso di un sistema meccanico unidimensionale con potenziale $V(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6}$, il cui grafico è mostrato in Fig. 1.

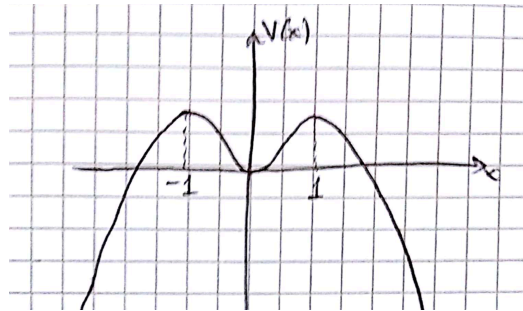


Figura 1: Il grafico del potenziale unidimensionale $V(x)$.

Il grafico qualitativo delle curve di livello nel piano delle fasi (x, \dot{x}) è mostrato in Fig. 2 (la discussione qualitativa della natura del moto è lasciata al lettore).

Nel caso in cui $L > 0$, il potenziale efficace tende a $+\infty$ per $\rho \rightarrow 0^+$, mentre tende a $-\infty$ per $\rho \rightarrow +\infty$. Le proprietà di monotonia di $V_{eff}(\rho)$ dipendono dal segno della derivata:

$$V'_{eff}(\rho) = -\rho^5 + \rho - \frac{L^2}{\rho^3} = -\frac{\rho^8 - \rho^4 + L^2}{\rho^3},$$

che si può annullare solo se il discriminante $1 - 4L^2 \geq 0$. Più precisamente, se $1 - 4L^2 < 0$, i.e., per $L > 1/2$, $V_{eff}(\rho)$ è strettamente monotona decrescente con derivata sempre negativa. Per $L = 1/2$,

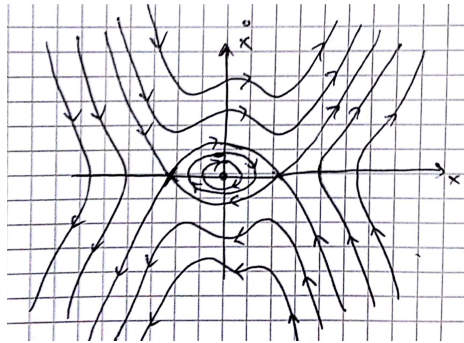


Figura 2: Grafico qualitativo delle curve di livello al variare di E nel caso in cui $L = 0$.

$V_{eff}(\rho)$ è strettamente monotona decrescente, con derivata nulla solo in $\rho = \rho_0 := 2^{-1/4}$. Per $0 < L < 1/2$, la derivata si annulla in due punti, $\rho_1 = [(1 - \sqrt{1 - 4L^2})/2]^{1/4}$ e $\rho_2 = [(1 + \sqrt{1 - 4L^2})/2]^{1/4}$; V_{eff} è decrescente per $0 < \rho < \rho_1$ e per $\rho > \rho_2$; è crescente per $\rho_1 < \rho < \rho_2$; i punti $\rho_{1,2}$ sono punti di equilibrio per il potenziale efficace, dove ρ_1 è stabile, in quanto minimo locale, e ρ_2 è instabile, in quanto massimo locale. Il grafico qualitativo del potenziale efficace al variare di $L > 0$ è mostrato in Fig. 3.

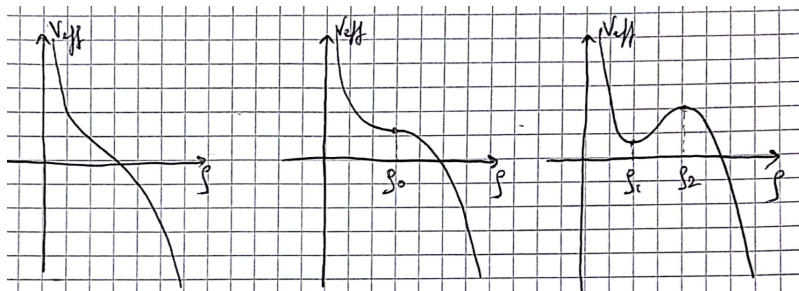


Figura 3: Grafico qualitativo del potenziale efficace al variare di $L > 0$. La figura di sinistra si riferisce al caso $L > 1/2$, quella al centro al caso $L = 1/2$, e quella di destra al caso $0 < L < 1/2$.

Il grafico qualitativo delle curve di livello nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$ è mostrato in Fig. 4.

Nel caso in cui $L > 1/2$ tutti i moti sono aperti, e tendono all'infinito sia nel passato che nel futuro.

Nel caso in cui $L = 1/2$ il sistema ammette tre tipi di moto radiale: banale, i.e., $\rho(t) \equiv \rho_0$; moto aperto che tende all'infinito sia nel passato che nel futuro, nel caso in cui $E \neq V_{eff}(\rho_0)$; aperto critico, che tende all'infinito nel futuro e a ρ_0 nel passato (o viceversa), nel caso in cui $E = V_{eff}(\rho_0)$ e $\rho(0) \neq \rho_0$.

Infine, nel caso in cui $0 < L < 1/2$, il sistema ammette i seguenti tipi di moto radiale: banale, i.e., $\rho(t) \equiv \rho_1$ o $\rho(t) \equiv \rho_2$; periodico non

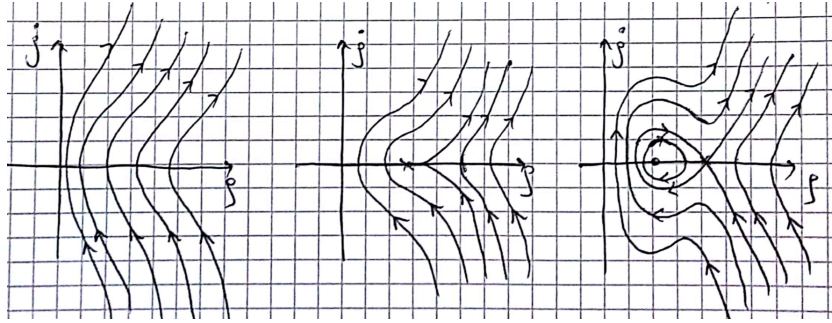


Figura 4: Grafico qualitativo del potenziale efficace al variare di $L > 0$. La figura di sinistra si riferisce al caso $L > 1/2$, quella al centro al caso $L = 1/2$, e quella di destra al caso $0 < L < 1/2$.

banale, se $V_{eff}(\rho_1) < E < V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) < \rho_2$; aperto che tende all'infinito sia nel passato che nel futuro, nel caso in cui $E > V_{eff}(\rho_2)$, oppure $E < V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) > \rho_2$; chiuso aperiodico, che tende a ρ_2 sia nel passato che nel futuro, se $E = V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) < \rho_2$; aperto critico, che tende all'infinito nel futuro e a ρ_2 nel passato (o viceversa), se $E = V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) > \rho_2$.

- (d) Un possibile dato iniziale per cui il moto complessivo è periodico è un dato iniziale per cui $L = 1/2$ e $\rho(0) = 1/2$, nel qual caso $\rho(t) \equiv \rho_0 = 2^{-1/4}$ e $\dot{\theta}(t) \equiv L/\rho_0^2 = 1/\sqrt{2}$, i.e., il moto è circolare uniforme con periodo $T = 2\pi/\dot{\theta} = 2\sqrt{2}\pi$.
- (e) Un possibile dato iniziale per cui il moto è aperto è un dato iniziale per cui $L > 1/2$. In tal caso il tempo di fuga all'infinito a partire dal punto di inversione ρ_- (che è l'unica soluzione positiva dell'equazione $E = V_{eff}(\rho)$) è

$$T_\infty = \int_{\rho_-}^{+\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}}.$$

La convergenza di questo integrale dipende dal comportamento della funzione integranda per $\rho \rightarrow \infty$: in tale limite, la funzione integranda si comporta asintoticamente come $\sqrt{3}/\rho^3$, che è integrabile all'infinito. Quindi il tempo di fuga all'infinito è finito (e la soluzione corrispondente non è globale nel tempo).

2. Un sistema meccanico è costituito da due sbarre uguali, rettilinee, omogenee, pesanti, di massa M e lunghezza ℓ , vincolate a muoversi su un piano verticale. La sbarra AB ha l'estremo A vincolato a scorrere sulla retta orizzontale passante per O , mentre l'estremo B è vincolato a scorrere sulla retta verticale passante per O , come descritto in figura.

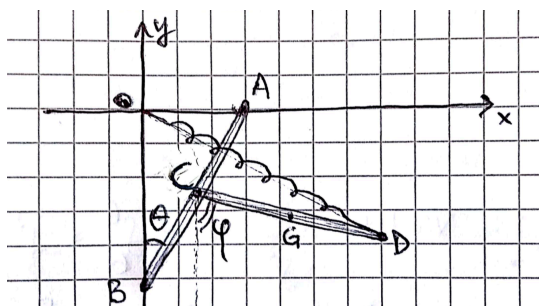


Figura 5: Il sistema di due aste vincolato descritto nel testo.

La sbarra CD ha l'estremo C incernierato nel punto di mezzo della sbarra AB . Oltre alla forza gravitazionale, il sistema è soggetto a una forza elastica di costante elastica k , che agisce su D e ha centro in O .

Tutti i vincoli sono supposti ideali. Si usino come coordinate Lagrangiane gli angoli θ e φ mostrati in figura.

- Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.
- Riconoscere che i punti $(\theta, \varphi) = (0, 0), (\pi, 0), (0, \pi), (\pi, \pi)$ sono punti di equilibrio, e studiare la stabilità del punto $(0, 0)$ al variare di k .
[Facoltativo: determinare gli eventuali altri punti di equilibrio, al variare di k].
- Si consideri ora il caso in cui il sistema si muove in assenza di gravità, ovvero, si ponga l'accelerazione di gravità g uguale a 0 nelle equazioni del moto determinate sopra. Riconoscere che la Lagrangiana è invariante sotto il gruppo di trasformazioni a un parametro $g_\alpha(\theta, \varphi) = (\theta + \alpha, \varphi + \alpha)$ e calcolare la carica di Noether corrispondente.

SOLUZIONE.

- Per scrivere la Lagrangiana del sistema occorre calcolare l'energia cinetica e potenziale del sistema nelle coordinate Lagrangiane θ, φ assegnate.

Energia cinetica. L'energia cinetica totale è la somma delle energie cinetiche delle due aste, ognuna delle quali, usando il teorema di König, è la somma dell'energia cinetica traslazionale associata al moto del centro di massa e dell'energia cinetica di rotazione attorno al centro di massa. Il centro di massa dell'asta AB

è $\mathbf{x}_C = \frac{\ell}{2}(\sin \theta, -\cos \theta)$, cosicché $\dot{\mathbf{x}}_C = \frac{\ell}{2}\dot{\theta}(\cos \theta, \sin \theta)$. Quindi l'energia cinetica dell'asta AB è

$$T_{AB} = \frac{M}{2}|\dot{\mathbf{x}}_C|^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{M}{2}\frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{M\ell^2}{12}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}M\ell^2\dot{\theta}^2,$$

dove il termine $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$ rappresenta l'energia cinetica di rotazione attorno al centro di massa, e abbiamo usato che $I = \frac{1}{12}M\ell^2$. Analogamente, il centro di massa dell'asta CD è $\mathbf{x}_G = \frac{\ell}{2}(\sin \theta, -\cos \theta) + \frac{\ell}{2}(\sin \varphi, -\cos \varphi)$, cosicché $\dot{\mathbf{x}}_G = \frac{\ell}{2}\dot{\theta}(\cos \theta, \sin \theta) + \frac{\ell}{2}\dot{\varphi}(\cos \varphi, \sin \varphi)$. Quindi l'energia cinetica dell'asta CD è

$$\begin{aligned} T_{CD} &= \frac{M}{2}|\dot{\mathbf{x}}_G|^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{M}{2}\frac{\ell^2}{4}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta - \varphi)) + \frac{1}{2}\frac{M\ell^2}{12}\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{M\ell^2}{8}\dot{\theta}^2 + \frac{M\ell^2}{6}\dot{\varphi}^2 + \frac{M\ell^2}{4}\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta - \varphi). \end{aligned}$$

Sommando le due espressioni troviamo l'energia cinetica totale:

$$T = T_{AB} + T_{CD} = \frac{7}{24}M\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}M\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}M\ell^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta - \varphi).$$

Energia potenziale. L'energia potenziale è la somma delle energie potenziali gravitazionali delle due aste più l'energia potenziale elastica della molla:

$$\begin{aligned} U &= Mg\left(-\ell\cos\theta - \frac{\ell}{2}\cos\varphi\right) + \frac{k\ell^2}{8}[(\sin\theta + 2\sin\varphi)^2 + (\cos\theta + 2\cos\varphi)^2] \\ &= -Mg\ell(\cos\theta + \frac{1}{2}\cos\varphi) + \frac{k\ell^2}{2}\cos(\theta - \varphi) + \text{costante}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che: la coordinata verticale di C è $-\frac{\ell}{2}\cos\theta$, la coordinata verticale di G è $-\frac{\ell}{2}(\cos\theta + \cos\varphi)$, e le coordinate di \mathbf{x}_D sono $\mathbf{x}_D = \frac{\ell}{2}(\sin\theta, -\cos\theta) + \ell(\sin\varphi, -\cos\varphi)$.

La Lagrangiana del sistema è uguale all'energia cinetica meno l'energia potenziale. Quindi,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) &= \frac{7}{24}M\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}M\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}M\ell^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta - \varphi) \\ &\quad + Mg\ell(\cos\theta + \frac{1}{2}\cos\varphi) - \frac{k\ell^2}{2}\cos(\theta - \varphi), \end{aligned}$$

cosicché le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{7}{12}M\ell^2\dot{\theta} + \frac{1}{4}M\ell^2\dot{\varphi}\cos(\theta - \varphi)\right] &= \\ &= -\frac{1}{4}M\ell^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\theta - \varphi) - Mg\ell\sin\theta + \frac{k\ell^2}{2}\sin(\theta - \varphi) \\ \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{3}M\ell^2\dot{\varphi} + \frac{1}{4}M\ell^2\dot{\theta}\cos(\theta - \varphi)\right] &= \\ &= \frac{1}{4}M\ell^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\theta - \varphi) - \frac{Mg\ell}{2}\sin\varphi - \frac{k\ell^2}{2}\sin(\theta - \varphi). \end{aligned}$$

Calcolando esplicitamente le derivate a membro di sinistra troviamo:

$$\begin{aligned} \frac{7}{12}M\ell^2\ddot{\theta} + \frac{1}{4}M\ell^2\ddot{\varphi}\cos(\theta - \varphi) + \frac{1}{4}M\ell^2\dot{\varphi}^2\sin(\theta - \varphi) &= \\ &= -Mg\ell\sin\theta + \frac{k\ell^2}{2}\sin(\theta - \varphi) \\ \frac{1}{3}M\ell^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{4}M\ell^2\ddot{\theta}\cos(\theta - \varphi) - \frac{1}{4}M\ell^2\dot{\theta}^2\sin(\theta - \varphi) &= \\ &= -\frac{Mg\ell}{2}\sin\varphi - \frac{k\ell^2}{2}\sin(\theta - \varphi). \end{aligned}$$

(b) L'equazione per i punti di equilibrio è:

$$\begin{cases} Mg\ell\sin\theta = \frac{k\ell^2}{2}\sin(\theta - \varphi), \\ \frac{Mg\ell}{2}\sin\varphi = -\frac{k\ell^2}{2}\sin(\theta - \varphi), \end{cases} \quad (1)$$

che è risolta da $(\theta, \varphi) = (0, 0), (\pi, 0), (0, \pi), (\pi, \pi)$, il che dimostra che tali punti sono di equilibrio.

Per studiare la stabilità di $(0, 0)$, calcoliamo la matrice Hessiana del potenziale $U = U(\theta, \varphi) = -Mg\ell(\cos\theta + \frac{1}{2}\cos\varphi) + \frac{k\ell^2}{2}\cos(\theta - \varphi)$ in $(0, 0)$. Si ha:

$$\mathcal{H}(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}U(0, 0) & \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi}U(0, 0) \\ \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi}U(0, 0) & \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}U(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Mg\ell - \frac{k\ell^2}{2} & \frac{k\ell^2}{2} \\ \frac{k\ell^2}{2} & \frac{Mg\ell}{2} - \frac{k\ell^2}{2} \end{pmatrix}$$

o, equivalentemente, ponendo $\alpha := \frac{Mg}{k\ell}$,

$$\mathcal{H}(0, 0) = \frac{k\ell^2}{2} \begin{pmatrix} 2\alpha - 1 & 1 \\ 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di $\begin{pmatrix} 2\alpha - 1 & 1 \\ 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$ sono $\lambda_{\pm} = \frac{3}{2}\alpha - 1 \pm \sqrt{\alpha^2/4 + 1}$.

La condizione affinché entrambi tali autovalori siano positivi è: $\frac{3}{2}\alpha > 1$ e $(\frac{3}{2}\alpha - 1)^2 > \alpha^2/4 + 1$; tali condizioni sono verificate se e solo se $\alpha > 3/2$. In conclusione, se $2Mg > 3k\ell$, $(0, 0)$ è stabile; se $2Mg < 3k\ell$, $(0, 0)$ è instabile; nel caso degenere $2Mg = 3k\ell$, lo studio della matrice Hessiana non è sufficiente a stabilire la natura di $(0, 0)$ (ma non approfondiremo questo caso ulteriormente).

[Facoltativo.] Vediamo se il sistema (1) ammette altre soluzioni oltre $(0, 0), (\pi, 0), (0, \pi), (\pi, \pi)$. Riscrivendo $\sin(\theta - \varphi) = \sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi$, e dividendo per $Mg\ell/2$ possiamo riscrivere (1) nella forma:

$$\begin{cases} 2\sin\theta = \frac{k\ell}{Mg}(\sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi), \\ \sin\varphi = -\frac{k\ell}{Mg}(\sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi). \end{cases}$$

Sommando le due equazioni troviamo $\sin\varphi = -2\sin\theta$. Quindi, rimpiazzando $\sin\varphi$ con $-2\sin\theta$ nel membro di destra della prima

equazione, e $\sin \theta$ con $-\frac{1}{2} \sin \varphi$ nel membro di destra della seconda equazione, otteniamo:

$$\begin{cases} 2 \sin \theta = \frac{k\ell}{Mg} (\sin \theta \cos \varphi + 2 \sin \theta \cos \theta), \\ \sin \varphi = -\frac{k\ell}{Mg} (-\frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi), \end{cases}$$

o, equivalentemente, ricordando la definizione $\alpha = \frac{Mg}{k\ell}$,

$$\begin{cases} 2\alpha \sin \theta = \sin \theta (\cos \varphi + 2 \cos \theta), \\ 2\alpha \sin \varphi = \sin \varphi (\cos \varphi + 2 \cos \theta). \end{cases}$$

In conclusione, l'equazione per i punti di equilibrio è $\sin \theta = \sin \varphi = 0$ (che è risolta da $(0, 0), (\pi, 0), (0, \pi), (\pi, \pi)$) oppure

$$\begin{cases} \sin \varphi = -2 \sin \theta, \\ \cos \varphi = -2 \cos \theta + 2\alpha. \end{cases}$$

Quadrando membro a membro le due equazioni trovo:

$$\begin{cases} \sin^2 \varphi = 4 \sin^2 \theta, \\ \cos^2 \varphi = 4 \cos^2 \theta + 4\alpha^2 - 8\alpha \cos \theta. \end{cases}$$

Sommando le due equazioni trovo:

$$1 = 4 + 4\alpha^2 - 8\alpha \cos \theta \quad \Leftrightarrow \quad \cos \theta = \frac{4\alpha^2 + 3}{8\alpha}.$$

Ricordando poi che $\cos \varphi = -2 \cos \theta + 2\alpha$ trovo:

$$\cos \varphi = \frac{4\alpha^2 - 3}{4\alpha}.$$

Queste due equazioni ammettono soluzioni diverse da $(0, 0), (\pi, 0), (0, \pi), (\pi, \pi)$ solo se

$$\left| \frac{4\alpha^2 + 3}{8\alpha} \right| < 1 \quad \text{e} \quad \left| \frac{4\alpha^2 - 3}{4\alpha} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}.$$

In tal caso il sistema ammette due punti di equilibrio aggiuntivi oltre $(0, 0), (\pi, 0), (0, \pi), (\pi, \pi)$, ovvero $(\bar{\theta}, -\bar{\varphi})$ e $(-\bar{\theta}, \bar{\varphi})$, con

$$\bar{\theta} = \arccos \frac{4\alpha^2 + 3}{8\alpha} \quad \text{e} \quad \bar{\varphi} = \arccos \frac{4\alpha^2 - 3}{4\alpha}.$$

(c) Se poniamo $g = 0$, la Lagrangiana del sistema si riduce a:

$$\mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{7}{24} M\ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{6} M\ell^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} M\ell^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) - \frac{k\ell^2}{2} \cos(\theta - \varphi),$$

che è evidentemente invariante sotto la trasformazione $g_\alpha(\theta, \varphi) = (\theta + \alpha, \varphi + \alpha)$, i.e.,

$$\mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \mathcal{L}(\theta + \alpha, \varphi + \alpha, \dot{\theta}, \dot{\varphi}).$$

La grandezza conservata, associata a tale trasformazione secondo il teorema di Noether, è:

$$I = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{7}{12} M\ell^2 \dot{\theta} + \frac{1}{3} M\ell^2 \dot{\varphi} + \frac{1}{4} M\ell^2 (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \cos(\theta - \varphi).$$