Corsi di laurea in Matematica e Fisica - Anno Accademico 2017/18

FM210 / MA

Quinto Scritto [11-2-2019]

1. Due punti materiali A, B di massa m sono vincolati a muoversi in un piano verticale sotto l'effetto della forza di gravità, e sono tra loro collegati da una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla. Si usino come coordinate Lagrangiane: le coordinate (x, y) del centro di massa del sistema (misurate in un sistema di riferimento in cui l'asse x è orizzontale, e l'asse y verticale orientato verso l'altro); la distanza ξ tra A e B; l'angolo θ che il segmento AB forma con l'asse x.

   (a) Scrivere la Lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, \xi, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\xi}, \dot{\theta})$ del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.

   (b) Riconoscere che il sistema ammette due variabili cicliche. Si identifichino le costanti del moto ad esse associate.

   (c) Si usi il metodo di Routh per ridurre di due il numero di gradi di libertà del sistema.

   (d) Si risolvano le equazioni del moto definite dalla Lagrangiana ridotta, o esplicitamente, ove possibile, o implicitamente con il metodo di integrazione per quadrature. Se ne discuta la natura qualitativa dei moti al variare dei dati iniziali.

SOLUZIONE.

(a) Le posizioni dei punti A e B espresse nelle coordinate assegnate sono:

$$\mathbf{r}_A = (x, y) + \frac{\xi}{2}(\cos\theta, \sin\theta), \qquad \mathbf{r}_B = (x, y) - \frac{\xi}{2}(\cos\theta, \sin\theta),$$

cosicché le loro velocità sono

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_A &= (\dot{x}, \dot{y}) + \frac{\dot{\xi}}{2}(\cos\theta, \sin\theta) + \frac{\xi}{2}\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta),\\
\dot{\mathbf{r}}_B &= (\dot{x}, \dot{y}) - \frac{\dot{\xi}}{2}(\cos\theta, \sin\theta) - \frac{\xi}{2}\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta).
\end{aligned}$$

L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\mathbf{r}}_A^2 + \dot{\mathbf{r}}_B^2) = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{1}{4}\dot{\xi}^2 + \frac{1}{4}\xi^2\dot{\theta}^2).$$

L'energia potenziale (gravitazionale più elastica) è

$$U = 2mgy + \frac{k}{2}\xi^2,$$

cosicché la Lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L} = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{1}{4}\dot{\xi}^2 + \frac{1}{4}\xi^2\dot{\theta}^2) - 2mgy - \frac{k}{2}\xi^2.$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti sono:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(2m\dot{x}) = 0,\\
&\frac{d}{dt}(2m\dot{y}) = -2mg,\\
&\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\dot{\xi}) = \frac{1}{2}m\xi\dot{\theta}^2 - k\xi,\\
&\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\xi^2\dot{\theta}) = 0.
\end{aligned}$$

(b) Come evidente dalle formule ricavate al punto precedente, le variabili x e θ sono cicliche. Le costanti del moto ad esse associate sono:

$$P := 2m\dot{x}, \qquad L := \frac{1}{2}m\xi^2\dot{\theta}.$$

(c) La Lagrangiana ridotta (di Routh) è:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_R(y,\xi,\dot{y},\dot{\xi}) &= \left[\mathcal{L}(\cancel{x},y,\xi,\cancel{\theta},\dot{x},\dot{y},\dot{\xi},\dot{\theta}) - P\dot{x} - L\dot{\theta}\right]\Big|_{\dot{x}=\frac{P}{2m},\dot{\theta}=\frac{2L}{m\xi^2}}\\
&= -\frac{P^2}{4m} + m\dot{y}^2 + \frac{m}{4}\dot{\xi}^2 - \frac{L^2}{m\xi^2} - 2mgy - \frac{k}{2}\xi^2.
\end{aligned}$$

Le equazioni del moto corrispondenti sono:

$$2m\ddot{y} = -2mg, \qquad \frac{1}{2}m\ddot{\xi} = \frac{2L^2}{m\xi^3} - k\xi.$$

(d) L'equazione del moto per y è quella di un moto accelerato uniforme, che si risolve esplicitamente come segue:

$$\ddot{y} = -g \quad \Longrightarrow \quad y(t) = y(0) + \dot{y}(0) - \frac{1}{2}gt^2.$$

L'equazione per la ξ è la stessa di un sistema meccanico unidimensionale con potenziale efficace $V_{eff}(\xi) = \frac{L^2}{m\xi^2} + \frac{k}{2}\xi^2$; tale funzione è pari, definita per $\xi \neq 0$, convessa, con un asintoto verticale in $\xi = 0$ e divergente a $+\infty$ per $\xi \to \pm\infty$. Le traiettorie nel piano delle fasi ridotto $(\xi, \dot{\xi})$ sono descritte dall'equazione

$$\dot{\xi} = \pm\sqrt{\frac{1}{m}(E - V_{eff}(\xi))}$$

e sono tutte curve chiuse, che corrispondono a moti periodici, di periodo

$$T = 2\int_{\xi_-}^{\xi_+} \frac{dx}{\sqrt{(E - V_{eff}(x))/m}},$$

dove $\xi_\pm$ sono le due soluzioni positive di $V_{eff}(x) = E$ (E rappresenta l'energia, che deve essere maggiore di $\min_x V_{eff}(x)$). La soluzione per quadrature (per la porzione di traiettorie sul semipiano delle fasi positivo, $\dot{\xi} \geq 0$) è

$$t - t_- = \int_{\xi_-}^{\xi(t)} \frac{dx}{\sqrt{(E - V_{eff}(x))/m}}.$$

2. Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = -q\sqrt{1 + \dot{q}^2}.$$

(a) Calcolare l'Hamiltoniana $H(q, p)$ associata a $\mathcal{L}$, e scrivere le equazioni di Hamilton corrispondenti.

(b) Scrivere e risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione generatrice $S(q, P)$ che mappi l'Hamiltoniana H in $\tilde{H}(Q, P) = P$. [Per la risoluzione dell'equazione, può essere utile notare che una possibile primitiva di $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ è

$$F(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\log(x + \sqrt{x^2 - 1}).]$$

(c) Si determini la trasformazione canonica

$$\begin{cases} Q = Q(q, p), \\ P = P(q, p), \end{cases}$$

associata alla funzione generatrice ricavata al punto precedente, e se ne calcoli l'inversa.

(d) Scrivere e risolvere le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili Q, P.

(e) Usare la trasformazione canonica precedente per risolvere le equazioni del moto, per dati iniziali $q(0) = 1$, $p(0) = 0$. Verificare esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni di Hamilton originali.

SOLUZIONE.

(a) Il momento coniugato è

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = -\frac{q\dot{q}}{\sqrt{1 + \dot{q}^2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{q} = -\frac{p}{q\sqrt{1 - p^2/q^2}}$$

L'Hamiltoniana corrispondente è quindi

$$H(q, p) = -\frac{p^2}{q\sqrt{1 - p^2/q^2}} + q\sqrt{1 + \frac{p^2}{q^2 - p^2}} = q\sqrt{1 - p^2/q^2},$$

le cui equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot{q} = -\frac{p/q}{\sqrt{1 - p^2/q^2}} \\ \dot{p} = -\frac{1}{\sqrt{1 - p^2/q^2}}, \end{cases}$$

che studieremo nella regione $q > 0$, $-q < p < q$ (una discussione analoga si applica per $q < 0$, $q < p < -q$).

(b) L'equazione di Hamilton-Jacobi richiesta è

$$q\sqrt{1-(\partial_q S)^2/q^2} = P \quad \Longrightarrow \quad \partial_q S(q,P) = \pm P\sqrt{q^2/P^2-1},$$

una soluzione della quale è

$$S(q,P) = \pm P^2 F(q/P),$$

dove $F(x)$ è la seguente primitiva di $\sqrt{x^2-1}$:

$$F(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2-1}).$$

(c) La trasformazione canonica associata alla funzione generatrice determinata sopra soddisfa:

$$\begin{aligned} p &= \pm P\sqrt{\frac{q^2}{P^2}-1}, \\ Q &= \pm 2PF\Big(\frac{q}{P}\Big) \mp q\sqrt{\frac{q^2}{P^2}-1} = \mp P\log\Big(\frac{q}{P}+\sqrt{\frac{q^2}{P^2}-1}\Big). \end{aligned}$$

Il segno va scelto in modo tale che invertendo la prima equazione si ottenga $P = H(q,p) = q\sqrt{1-p^2/q^2}$ (ricordiamo che stiamo studiando l'equazione nella regione $q>0$, $-q<p<q$); quindi il segno da scegliere è uguale al segno di p. La trasformazione canonica richiesta è quindi

$$P = \sqrt{q^2-p^2}, \qquad Q = -\frac{p}{|p|}\sqrt{q^2-p^2}\log\Big(\frac{q+|p|}{\sqrt{q^2-p^2}}\Big).$$

La trasformazione inversa è

$$q = P\cosh(Q/P), \qquad p = -P\sinh(Q/P).$$

(d) Le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili Q, P sono

$$\dot{Q} = 1, \qquad \dot{P} = 0,$$

la cui soluzione è

$$Q(t) = Q(0)+t, \qquad P(t) = P(0).$$

(e) I dati iniziali $q(0)=1$, $p(0)=0$ corrispondono a $Q(0)=0$, $P(0)=1$. La soluzione nelle nuove variabili è quindi $Q(t)=t$, $P(t)\equiv 1$. Questa corrisponde, nelle variabili originali, a

$$q(t) = \cosh t, \qquad p(t) = -\sinh t.$$

È evidente, per sostituzione, che tale soluzione soddisfa le equazioni di Hamilton originali.