Soluzioni 2^o tutorato - MA - 20/3/2018

Esercizio 1 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad un potenziale $V(x)$:

$$\ddot{x} = -V'(x),$$

dove $V(x) = x^3 - x$.

1. Scrivere esplicitamente l'equazione del moto e verificare esplicitamente la conservazione dell'energia meccanica $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$.

2. Studiare qualitativamente il moto, procedendo nel modo seguente:

   (a) Si disegni il grafico dell'energia potenziale.

   (b) Si identifichino due punti di equilibrio, $x_1 < x_2$, e se ne discuta la stabilità. Si identifichino in particolare i *valori critici dell'energia*, i.e., i valori dell'energia E_1, E_2 corrispondenti ai punti di equilibrio x_1, x_2.

   (c) Si identifichino i *valori critici dell'energia*, i.e., i valori dell'energia E_1, E_2 corrispondenti ai punti di equilibrio x_1, x_2. Si disegnino le curve di livello Σ_E al variare dell'energia E: si inizino a disegnare Σ_{E_1} e Σ_{E_2}, e poi le curve corrispondenti a valori rappresentativi di E (una per $E > E_1$, una per $E_2 < E < E_1$, una per $E < E_2$).

   (d) Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a (qualora esistano) moti periodici, moti aperti, moti chiusi aperiodici.

3. Calcolare il periodo dei moti periodici in forma di integrale definito.

4. Si fissi un dato iniziale corrispondente ad un moto aperto: il tempo in cui il punto raggiunge l'infinito è finito o no? Il moto esiste globalmente?

5. Si risolva *esplicitamente* il moto sulla separatrice

SOLUZIONE

1. $V'(x) = 3x^2 - 1$, quindi l'equazione del moto è

$$\ddot{x} = -3x^2 + 1 \tag{1}$$

   Per verificare che l'energia meccanica è conservata durante il moto, dobbiamo verificare che la sua derivata nel tempo è sempre nulla:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{x}V'(x) = \dot{x}(\ddot{x} + 3x^2 - 1) = 0 \tag{2}$$

   grazie all'equazione del moto (1).

2. (a) Per disegnare il grafico dell'energia potenziale dobbiamo studiare $V(x)$.
   $V(x) = 0$ nei punti $x_0 = 0$, $x_\pm = \pm 1$, e $\lim_{x\to\pm\infty} = \pm\infty$. La sua derivata prima è

$$V'(x) = 3x^2 - 1 \begin{cases} > 0 \text{ se } |x| > \frac{1}{\sqrt{3}} \\ = 0 \text{ in } x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ e } x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ < 0 \text{ se } x \in (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \end{cases} \tag{3}$$

   La derivata seconda

$$V''(x) = 6x \begin{cases} > 0 \text{ se } x > 0 \\ < 0 \text{ se } x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

   Quindi il grafico del potenziale è quello di figura (1), con un massimo relativo in $x_1 = -1/\sqrt{3}$, e un minimo relativo in $x_2 = 1/\sqrt{3}$.

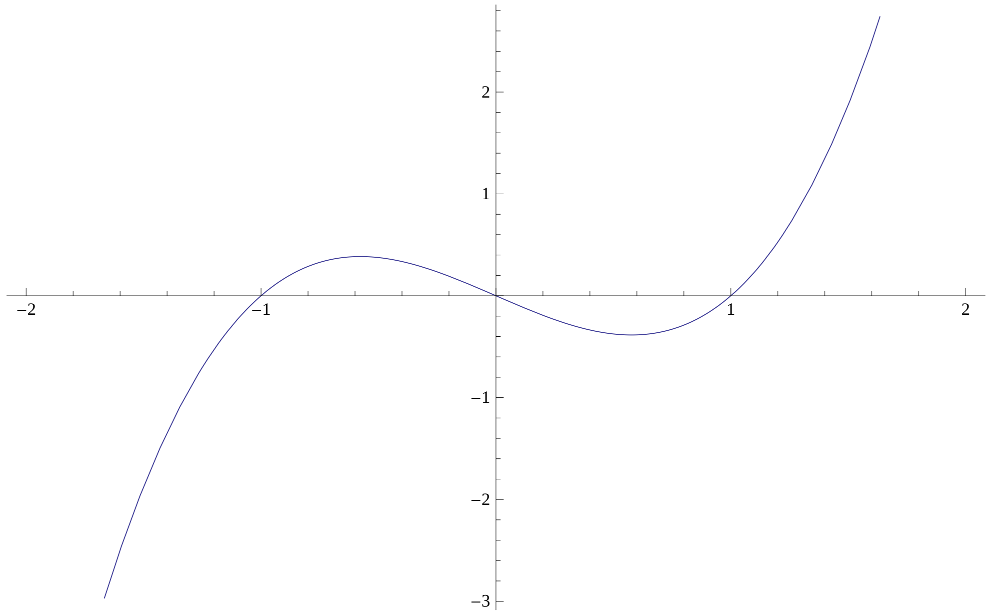

Figure 1: Grafico di $V(x) = x^3 - x$

(b) Nei punti di massimo e minimo locale, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, il potenziale vale rispettivamente

$$\begin{aligned} V(x_1) &= +\frac{2}{3\sqrt{3}} \\ V(x_2) &= -\frac{2}{3\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{5}$$

Per quanto discusso sopra, x_1 è un punto di *massimo locale non degenere (i.e., a derivata seconda negativa), quindi un punto di equilibrio instabile grazie al criterio del linearizzato*, mentre x_2 è un punto di *equilibrio stabile, grazie al teorema di Dirichlet.*

(c) Lo studio delle curve di livello fornisce grafici descritti in figura (2).

(d) Dallo studio del potenziale e delle curve di livello possiamo concludere che:

- Se i dati iniziali sono di tipo $(\dot{x}_0, x_0) = (0, x_{eq})$, dove con x_{eq} si intende uno qualsiasi dei punti di equilibrio, il moto è costante.
- Per valori dell'energia $-\frac{2}{3\sqrt{3}} < E < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ e dati iniziali $x(0) > x_1$, i moti sono periodici chiusi.
- Per valori dell'energia $E < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ e dati iniziali $x(0) < x_1$ i moti sono aperti e aperiodici, e asintoticamente $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = -\infty$.
- Per valori dell'energia $E > \frac{2}{3\sqrt{3}}$ i moti sono tutti aperti e aperiodici per qualsiasi scelta dei dati iniziali, e asintoticamente $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = -\infty$.
- In corrispondenza del valore critico dell'energia $E = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ i moti non banali sono tutti a-periodici, e possono essere limitati se $x(0) > x_1$ (in tal caso la traiettoria coincide con l'occhiello della separatrice in figura e il moto è asintotico sia nel futuro che nel passato a x_1, i.e., $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = x_1$) o illimitati se $x(0) < x(1)$ (in tal caso la traiettoria coincide con uno dei due rami della separatrice che si dipartono verso sinistra dal punto di equilibrio

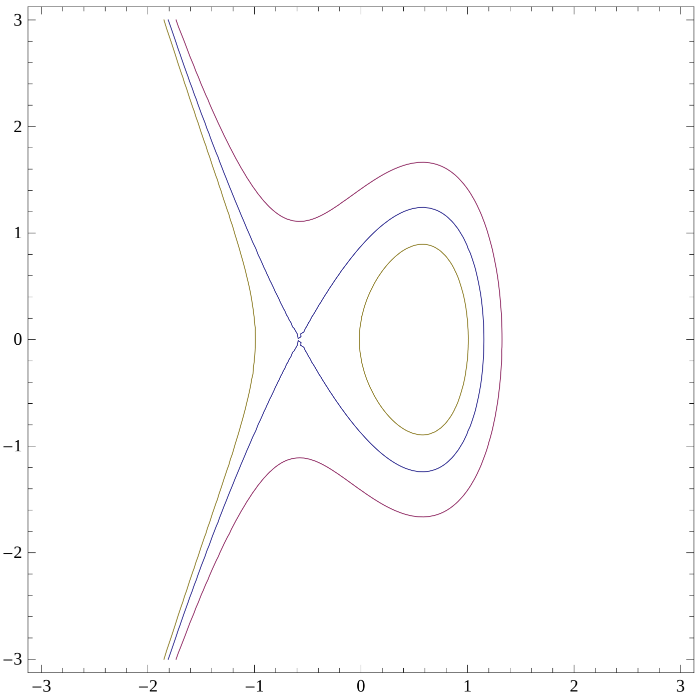

Figure 2: Curve di livello per valori di $E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ per valori $E = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ (separatrice,), $E = 1$ (moto aperto), $E = 1/64$ (moto chiuso e periodico se $x \in (x_1, x_2)$, aperto altrimenti).

instabile; il ramo superiore/inferiore corrisponde a un moto asintotico nel futuro/passato a x_1).

3. Scegliamo $-\frac{2}{3\sqrt{3}} < E < \frac{2}{3\sqrt{3}}$. L'equazione $E = V(x)$ ha tre soluzioni, e chiamiamo $x_E^{(-)} < x_E^{(+)}$ le due soluzioni $x_E^{(\pm)} \in (x_1, x_2)$. Allora

$$t(x_E^{(+)}) - t(x_E^{(-)}) = \int_{t(x_E^{(-)})}^{t(x_E^{(+)})} dt = \int_{x_E^{(-)}}^{x_E^{(+)}} \frac{dx}{\dot{x}} = \int_{x_E^{(-)}}^{x_E^{(+)}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}} \tag{6}$$

Come visto a lezione, il periodo T del moto periodico è la somma del tempo di andata e di quello di ritorno, ovvero $T = 2(t(x_E^{(+)}) - t(x_E^{(-)}))$, quindi

$$T = \sqrt{2} \int_{x_E^{(-)}}^{x_E^{(+)}} \frac{dx}{\sqrt{(E - x^3 + x)}} \tag{7}$$

4. Fissiamo $E > \frac{2}{3\sqrt{3}}$ e dato iniziale $(x(0), \dot{x}(0)) = (x_E, 0)$, dove x_E è l'unica radice di $V(x) = E$. La soluzione per quadrature, per $t > 0$ è

$$\int_{x(t)}^{x_E} \frac{dx}{\sqrt{2(E - x^3 + x)}} = t$$

Il tempo $t_{-\infty}$ necessario perché $x(t)$ raggiunga $-\infty$ è

$$t_{-\infty} = \int_{-\infty}^{x_E} \frac{dx}{\sqrt{2(E + x - x^3)}} \tag{8}$$

Per $x \to -\infty$ la funzione integranda si comporta asintoticamente come $|x|^{-3/2}$ (nel senso che il rapporto tra la funzione integranda e $|x|^{-3/2}$ ammette limite finito per $x \to -\infty$), che è integrabile per $x \to -\infty$. Quindi $t_{-\infty} < +\infty$, che il moto non è definito globalmente, ma soltanto per $t \in (-t_{-\infty}, t_{-\infty})$.

5. Fissiamo $E = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ e consideriamo la porzione di separatrice corrispondente a un moto limitato, $x(t) > -1/\sqrt{3}$ (il caso della porzione di separatrice corrispondente a un moto aperto si tratta analogamente). Consideriamo, ad esempio, il dato iniziale $x(0) = x_+$, $\dot{x}(0) = 0$, con x_+ il punto di inversione sulla separatrice corrispondente alla radice positiva di

$$x^3 - x - \frac{2}{2\sqrt{3}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 0,$$

che risulta essere $x_+ = 2/\sqrt{3}$. Allora

$$t = \int_{x(t)}^{2/\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{2\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} - x^3 + x\right)}} \tag{9}$$

dove $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x(t) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. Fattorizzando il denominatore nella forma $(\frac{2}{3\sqrt{3}} - x^3 + x) = (x + \frac{1}{\sqrt{3}})^2(\frac{2}{\sqrt{3}} - x)$, possiamo riscrivere l'integrale come

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x(t)}^{2/\sqrt{3}} \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} - x}} \tag{10}$$

Ponendo $\frac{2}{\sqrt{3}} - x = z^2 \Rightarrow dx = -2zdz$ e definendo $z(t) = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} - x(t)}$, l'integrale diventa:

$$t = \sqrt{2} \int_0^{z(t)} \frac{dz}{\sqrt{3} - z^2} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}} \log\left(\frac{\sqrt[4]{3} + z(t)}{\sqrt[4]{3} - z(t)}\right).$$

Invertendo tale espressione e ricordando la definizione di $z(t)$ troviamo:

$$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} - x(t)} = z(t) = \sqrt[4]{3}\frac{e^{t\sqrt{2}\sqrt[4]{3}} - 1}{e^{t\sqrt{2}\sqrt[4]{3}} + 1} = \sqrt[4]{3}\tanh\left(\frac{t\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\right)$$

o, equivalentemente,

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\tanh^2\left(\frac{t\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\right).$$

che è valida per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 (Lennard - Jones) Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$

$$m\ddot{x} = -V'(x),$$

soggetto ad un potenziale

$$V(x) = V_0\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{12} - \left(\frac{x_0}{x}\right)^6\right) \tag{11}$$

dove $V_0, x_0 > 0$.

1. Studiare qualitativamente il moto, procedendo come descritto nell'esercizio 1 (si disegni il grafico di V, quindi delle curve di livello al variare di E, etc.)

2. Scrivere il periodo dei moti periodici in forma di integrale definito.

3. Scelto un dato iniziale x_i corrispondente ad un moto aperto: il tempo che il sistema impiega per arrivare da x_i a infinito è finito o no? Il moto è definito globalmente?

SOLUZIONE

Osservazione: $V(x) = V(-x)$, quindi il potenziale è simmetrico per scambio di segno $x \to -x$. Quindi senza perdita di generalità possiamo restringerci al caso $x = |x| > 0$.

Il grafico del potenziale e le curve di livello, nonché alcune animazioni del moto nello spazio fisico e nello spazio delle fasi, sono disponibili a questo link:
`http://ian.jauslin.org/teaching/animations1d/animations.php?system=lennard-jones-html5`.

I moti a energia negativa sono limitati e periodici, mentre i moti a energia $E \geq 0$ sono aperti. Il caso $E = 0$ corrisponde a moti critici, che arrivano all'infinito con velocità nulla.

I moti a energia negativa non banali (i.e., diversi dal moto costante sul punto di equilibrio $x = \sqrt[6]{2}x_0$) hanno periodo

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(E - V(x))}} \tag{12}$$

dove $x_\pm$ sono le due soluzioni di $V(x) = E$ per $-V_0/4 < E < 0$.
Fissiamo ora $E \geq 0$, quindi i moti sono aperti per ogni dato iniziale. Il tempo che il sistema impiega per arrivare a $+\infty$ (una discussione analoga è valida per $-\infty$) è

$$T_\infty = \sqrt{m} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{E + V_0(\frac{x_0^6}{x^6} - \frac{x_0^{12}}{x^{12}})}} \tag{13}$$

che è un integrale divergente, quindi il moto è definito globalmente.

Esercizio 3 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad un potenziale $V(x)$:

$$\ddot{x} = -V'(x),$$

dove $V(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$.

- Studiare qualitativamente il moto, procedendo come descritto nell'esercizio 1
- Calcolare il periodo dei moti periodici in forma di integrale definito.
- Si fissi un dato iniziale corrispondente ad un moto aperto: il tempo in cui il punto raggiunge l'infinito è finito o no? Il moto esiste globalmente?
- Si risolva *esplicitamente* il moto sulla separatrice

SOLUZIONE

1. L'equazione del moto è

$$\ddot{x} = x^3 - x \tag{14}$$

Si verifica immediatamente che l'energia meccanica $E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ è una costante del moto, infatti

$$\frac{dE}{dt} = \ddot{x}\dot{x} - x^3\dot{x} + x\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} - (x^3 - x)) = 0 \tag{15}$$

usando (14).

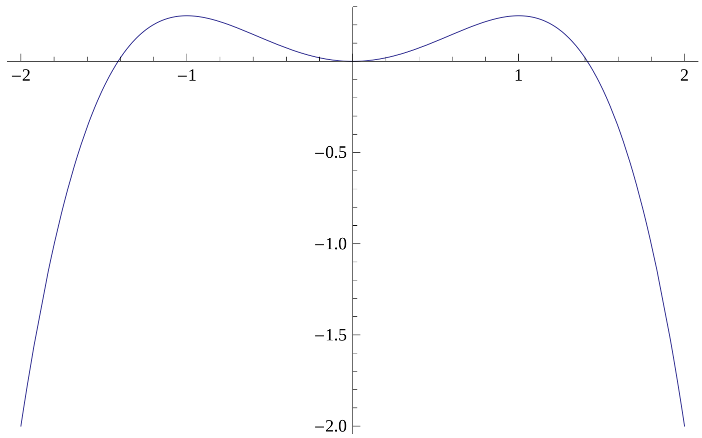

Figure 3: Grafico di $V(x) = -x^4/4 + x^2/2$

2. Innanzitutto dobbiamo trovare i punti di equilibrio, ovvero i punti in cui si annulla la derivata del potenziale:
$$V'(x) = -x^3 + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \pm 1. \tag{16}$$
Quindi: Esistono tre punti di equilibrio: $(x(0), \dot{x}(0)) = (0,0), (\pm 1, 0)$. Inoltre
$$V'(x) = x(1-x^2) \begin{cases} > 0 \text{ se } 0 < x < 1 \text{ oppure } x < -1 \\ < 0 \text{ se } -1 < x < 0 \text{ oppure } x > 1 \end{cases} \tag{17}$$
e $V''(x) = -3x^2 + 1$, cosicché $V''(0) = 1 > 0$, $V''(\pm 1) = -2 < 0$, quindi

   - $(0,0)$ è un punto di equilibrio stabile (teorema di Lyapunov),
   - $(\pm 1, 0)$ sono due punti di equilibrio instabili (criterio del linearizzato).

   I grafici delle curve di livello hanno la forma descritta in figura (4).
   Essendo $V(0) = 0$, $V(\pm 1) = \frac{1}{4}$, otteniamo che:

   - Se il sistema parte con velocita nulla su uno dei punti di equilibrio, allora il moto è costante.
   - Se $E > \frac{1}{4}$ i moti sono aperti per tutti i dati iniziali.
   - Se $0 < E < \frac{1}{4}$ e $|x| < 1$, il moto è periodico intorno al minimo del potenziale.
   - Se $0 < E < \frac{1}{4}$ e $|x| > 1$, il moto è aperto.
   - Se $E = 1/4$ e $x(0) \in (-1, 1)$ il moto è limitato e a periodico, e asintotico nel passato e nel futuro a ± 1, a seconda del valore iniziale della velocità (se $\dot{x}(0) > 0$, allora $\lim_{t\to\pm\infty} = \pm 1$, e viceversa). Se $E = 1/4$ e $x(0) < -1$ il moto è aperto, e asintotico nel passato/futuro a -1, a seconda che $\dot{x}(0)$ sia negativa/positiva. Se $E = 1/4$ e $x(0) > 1$ il moto è aperto, e asintotico nel passato/futuro a 1, a seconda che $\dot{x}(0)$ sia positiva/negativa.

   Consideriamo $0 < E < \frac{1}{4}$, e chiamiamo $x_E^{(\pm)}$ le due soluzioni dell'equazione $E = V(x)$ tali che $x_E^{(\pm)} \in (-1, 1)$. Allora, il tempo che la paricella impiega per arrivare da $x_E^{(-)}$ a $x_E^{(+)}$ è
$$t(x_E^{(+)}) - t(x_E^{(-)}) = \int_{t(x_E^{(-)})}^{t(x_E^{(+)})} ds = \int_{x_E^{(-)}}^{x_E^{(+)}} \frac{dx}{\dot{x}} = \int_{x_E^{(-)}}^{x_E^{(+)}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}}. \tag{18}$$

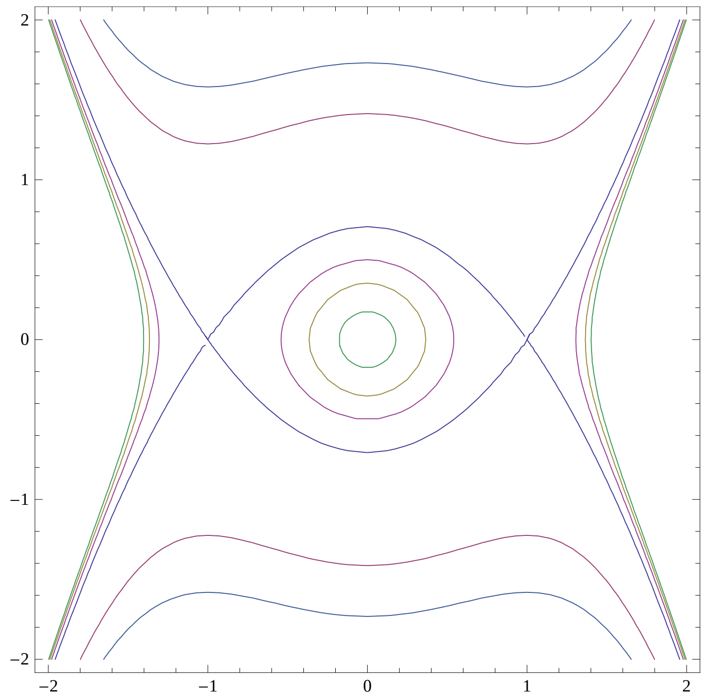

Figure 4: Curve di livello per diversi valori di $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$

Per calcolare il periodo del moto dobbiamo sommare il tempo di andata e quello di ritorno, quindi

$$T = 2[t(x_E^{(+)}) - t(x_E^{(-)})] = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}} = \sqrt{2}\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \tag{19}$$

3. Fissiamo $E = \frac{1}{4}$, e un qualsiasi dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0)$ sul ramo superiore della curva critica, ad es $(x(0), \dot{x}(0)) = (0, 1/\sqrt{2})$. Allora

$$t = \int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{2(\frac{1}{4} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2})}} \tag{20}$$

Osservando che $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(x^2 - 1)^2$ e che $|x^2 - 1| = 1 - x^2$ poiché $-1 < x < 1$ sul ramo di curva di livello di interesse, possiamo riscrivere l'integrale come

$$t = \sqrt{2}\int_0^{x(t)} \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\Bigg|_0^{x(t)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{1+x(t)}{1-x(t)}\right) \tag{21}$$

che può essere invertita in

$$x(t) = \frac{e^{\sqrt{2}\,t} - 1}{e^{\sqrt{2}\,t} + 1} = \tanh\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right). \tag{22}$$

4. Consideriamo un moto aperto di energia E con dato iniziale $(x(0), \dot{x}(0))$. Supponiamo per semplicità che $E \neq 1/4$ e che il dato iniziale corrisponda a $(x(0), \dot{x}(0)) = (0, \sqrt{2E})$, se $E > 1/4$, o a $(x(0), \dot{x}(0)) =$

$(x_-, 0)$, con x_- il punto di inversione tale che $x_- > 1$, per $E < 1/4$. Il tempo per raggiungere l'infinito è

$$t_\infty = \int_{x(0)}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2(E + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2})}} \tag{23}$$

Per $x \to \infty$ la funzione integranda si comporta asintoticamente come $\sqrt{2}/x^2$, che è integrabile all'infinito. Quindi $t_\infty < +\infty$: la particella raggiunge l'infinito in tempo finito. Corrispondentemente il moto non esiste per tutti i punti $t \in \mathbb{R}$, ma solo nell'intervallo finito aperto $t \in (-t_\infty, t_\infty)$.

Esercizio 4 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad un potenziale $V(x)$

$$\ddot{x} = x(1 + x^2)^\alpha \tag{24}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Studiare qualitativamente il moto, procedendo come descritto nell'esercizio 1

2. Si discuta al variare di α se le soluzioni aperte (i.e., tali che $x(t)$ non rimane limitato) sono globali nel tempo o no.

SOLUZIONE
1. $-V'(x) = x(1 + x^2)^\alpha$. Quindi

$$V(x) = \begin{cases} -\int x(1+x^2)^\alpha dx = -\frac{(1+x^2)^{(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)} + C \text{ se } \alpha \neq -1 \\ -\int \frac{x}{1+x^2} dx = -\frac{1}{2}\log(1+x^2) + C' \text{ se } \alpha = -1. \end{cases} \tag{25}$$

Scegliamo $C = C' = 0$ per comodità cosicché il potenziale al variare di α prende la forma

$$V(x) = V_\alpha(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2(\alpha+1)}(1+x^2)^{(\alpha+1)} & \text{se} \quad \alpha \neq -1 \\ -\frac{1}{2}\log(1+x^2) & \text{se} \quad \alpha = -1 \end{cases}$$

Per lo studio del grafico di $V_\alpha(x)$, notiamo che $V_\alpha(x) \leq 0$ per ogni x e $= 0$ solo se $\alpha = -1$ e $x = 0$. Inoltre:

$$V'(x) = -x(1+x^2)^\alpha \begin{cases} > 0 \text{ se } x < 0, \\ = 0 \text{ se } x = 0, \\ < 0 \text{ se } x > 0. \end{cases} \tag{26}$$

quindi in 0 il potenziale ha sempre il massimo assoluto. La derivata seconda è

$$V''(x) = -(x^2+1)^{(\alpha-1)}(x^2(2\alpha+1)+1)$$

- CASO $\alpha > -\frac{1}{2}$, $V''(x) < 0$ per ogni valore di x.

- CASO $\alpha < -\frac{1}{2}$, allora $V''(x) < 0$ per $|x| < \sqrt{-\frac{1}{1+2\alpha}}$ e $V''(x) > 0$ per $|x| > \sqrt{-\frac{1}{1+2\alpha}}$

In tutti i casi $V''(0) < 0$, quindi l'unico punto di equilibrio $x_0 = 0$ è sempre instabile per il criterio del linearizzato. Il livello critico di energia corrispondente è

$$V_\alpha(0) = \begin{cases} -1/(2(\alpha+1)) \text{ se } \alpha \neq -1, \\ 0 \text{ se } \alpha = -1. \end{cases} \tag{27}$$

Il grafico di $V_\alpha(x)$ risultante dalla discussione precedente, al variare di α, è illustrato in Fig. (5).

Dal grafico del potenziale, ricostruiamo poi la forma delle curve di livello usando la loro equazione in termini del potenziale, $\dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V_\alpha(x))}$, il cui grafico è riportato in figura 6.

Il comportamento qualitativo delle orbite risultante dal grafico delle curve di livello è il seguente:

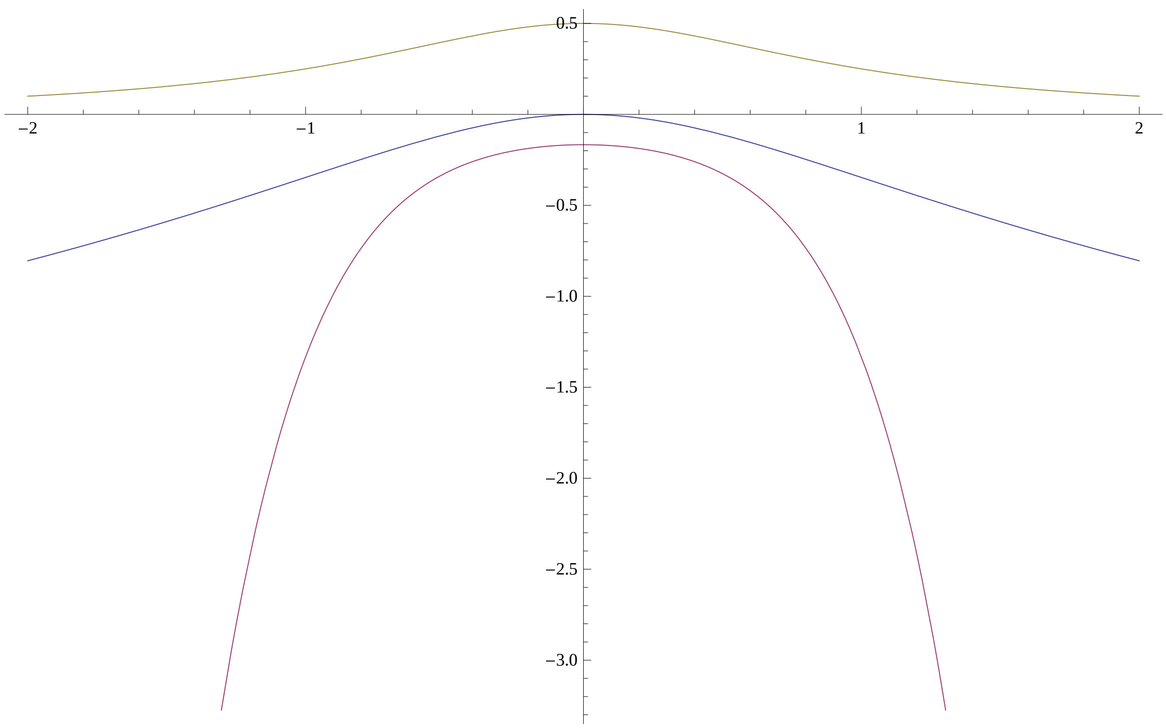

Figure 5: Grafico del potenziale per diversi valori di α: in viola il caso $\alpha = 2$, in blu il caso $\alpha = -1$ (potenziale logaritmico), in marrone il caso $\alpha = -2$.

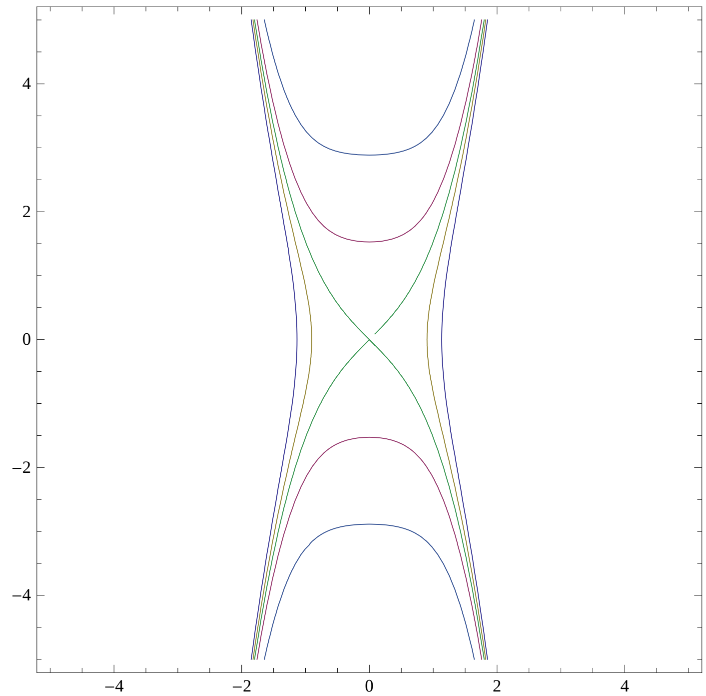

Figure 6: Curve di livello nel caso $\alpha = 2$. Per altri valori di α il comportamento qualitativo delle curve è simile.

- Se il sistema parte con velocità nulla in $x = 0$, il moto è costante.
- Tutti gli altri dati iniziali producono moti aperti, che tendono a $\pm\infty$ sia nel passato che nel futuro, con l'eccezione del moto sulla sepratrice, $E = V_\alpha(0)$, il quale o nel passato o nel futuro (a seconda del segno della velocità) è asintotico alla posizione di equilibrio instabile $(0, 0)$, che viene raggiunto in tempo infinito.

2. Consideriamo un dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0)$ corrispondente ad un moto aperto. Supponiamo, ad esempio, che il moto tenda asintoticamente nel futuro a $+\infty$. Il tempo T_∞ per raggiungere l'infinito è:

- CASO $\alpha \neq -1$

$$T_\infty = \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2(E + \frac{(1+x^2)^{(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)})}} \tag{28}$$

Se $\alpha < -1$, la funzione integranda tende a costante $(1/\sqrt{2E})$ per $x \to \infty$. Dato che la funzione costante ovviamente non è integrabile a infinito, $T_\infty = +\infty$, quindi il moto in questo caso è definito globalmente. Se $\alpha > -1$, per x grandi la funzione integranda si comporta come $\sqrt{\alpha+1}\,|x|^{-(\alpha+1)}$, che è integrabile all'infinito se e solo se $\alpha + 1 > 1$. Quindi

$$T_\infty \begin{cases} = \infty \text{ se } \alpha \leq 0 \\ < \infty \text{ se } \alpha > 0 \end{cases} \tag{29}$$

In conclusione, se $\alpha \leq 0$ con $\alpha \neq -1$, il moto è definito globalmente, ovvero per $t \in (-\infty, +\infty)$.
Se $\alpha > 0$ il moto diverge a infinito in tempo finito, e la soluzione quindi non è definita globalmente nel tempo.

- CASO $\alpha = -1$
$$T_\infty = \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2(E + \frac{1}{2}\log(1+x^2))}} \tag{30}$$
che è $= +\infty$, poiché la funzione integranda si comporta per x grandi come $1/\sqrt{\log x^2}$, che non è integrabile all'infinito. Quindi in questo caso il moto è definito globalmente.

Esercizio 5 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$
$$\ddot{x} = -V'(x), \tag{31}$$
soggetto ad un potenziale
$$V(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ per } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases} \tag{32}$$

1. Studiare qualitativamente il moto, procedendo come descritto sopra.
2. Discutere la stabilità del punto $(0, 0)$.

SOLUZIONE

Vedi la soluzione all'esercizio 3 del tutorato del corso di FM210, A.A. 2013/2014, disponibile online a: `http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2013/Tutorato3bis.pdf`

Esercizio 6 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad un potenziale $V(x)$:
$$\ddot{x} = -V'(x),$$
dove $V(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2}$.

1. Studiare qualitativamente il moto, procedendo come descritto sopra.
2. Calcolare il periodo dei moti periodici in forma di integrale definito.
3. Si fissi un dato iniziale corrispondente ad un moto aperto: il tempo in cui il punto raggiunge l'infinito è finito o no? Il moto esiste globalmente?

SOLUZIONE

1. L'equazione del moto è $\ddot{x} = xe^{x^2}$. Si verifica immediatamente che l'energia meccanica è conservata, infatti
$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}e^{x^2} \\ \frac{dE}{dt} &= \dot{x}\ddot{x} - x\dot{x}e^{x^2} = \dot{x}(\ddot{x} - xe^{x^2}) = 0 \end{aligned} \tag{33}$$
2. Notiamo prima di tutto che $V(x) \leq -1/2$ per ogni x. Inoltre
$$V'(x) = -xe^{x^2} \begin{cases} > 0 \text{ se } x < 0 \\ = 0 \text{ se } x = 0 \\ < 0 \text{ se } x > 0 \end{cases} \tag{34}$$
e
$$V''(x) = -e^{x^2} - 2x^2e^{x^2} < 0 \text{ per ogni } x \tag{35}$$
Quindi l'unico punto fisso del sistema è $(x, \dot{x}) = (0, 0)$, ed è un punto di equilibrio instabile. Per tutti gli altri dati iniziali, i moti sono moti aperti, non ci sono moti periodici. Il grafico del potenziale e delle curve di livello sono nelle figure (7) e (8).

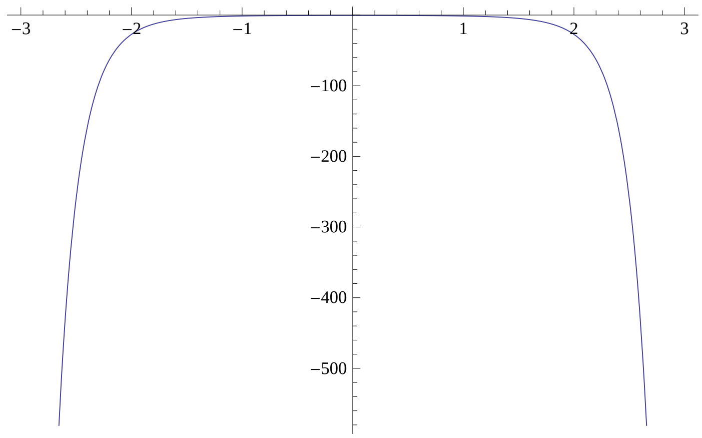

Figure 7: Grafico di $V(x) = -\frac{e^{x^2}}{2}$

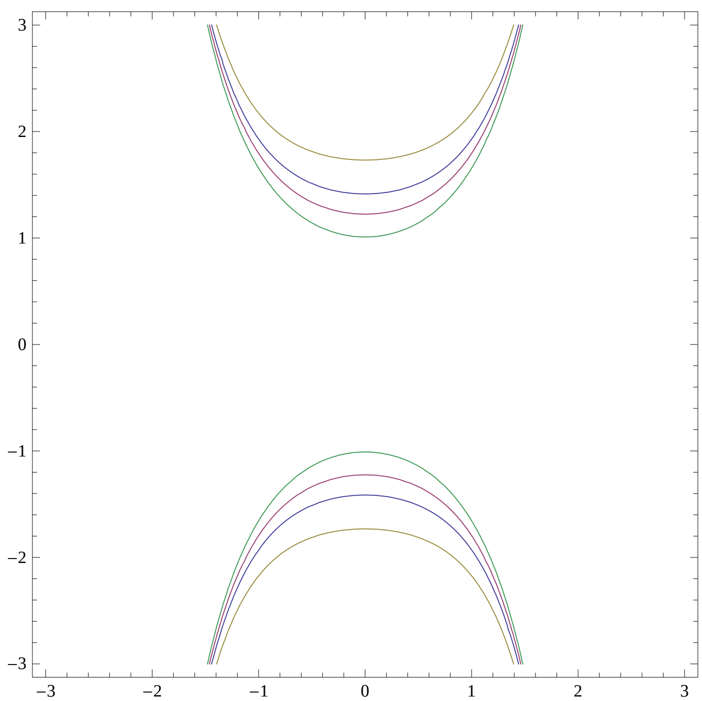

Figure 8: Grafico delle curve li livello per diversi valori di $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$. Nota: i valori in figura corrispondono tutti a valori di E maggiori di $-1/2$. La separatrice e le curve con $E < -1/2$ non sono riportate esplicitamente.

3. Scegliamo un dato iniziale $(x(0), \dot{x}(0))$ tale che, ad es., $\dot{x}(t) > 0$, $\forall t > 0$. Il tempo per arrivare a infinito è

$$t_\infty = \int_{x(0)}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2E + e^{x^2}}} < \infty \tag{36}$$

quindi il sistema raggiunge l'infinito in un tempo finito: il moto non esiste globalmente, ma solo nell'intervallo $t \in (-t_\infty, t_\infty)$.