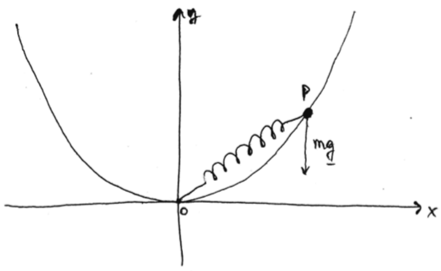
Tutorato 5 - MA/FM210 - 24/04/2018

<u>Esercizio 1.</u> Si consideri il sistema lagrangiano costituito da un punto materiale di massa m, vincolato a muoversi in un piano verticale (x, y), lungo il profilo di equazione $y = x^2/\ell_0$. Il punto è sottoposto alla forza di gravità ed è collegato all'estremo di una molla di costante elastica $k > 0$.

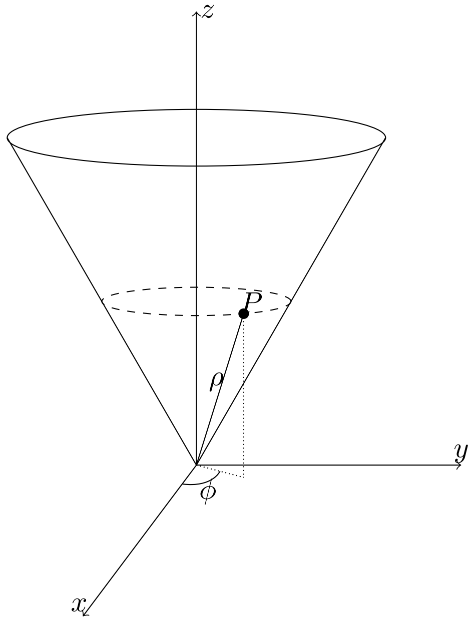


- Si scriva la lagrangiana del sistema nelle coordinate adattate al vincolo.
- Si derivino le equazioni del moto sul vincolo.
- Si identifichi una grandezza conservata.
- Si risolva il moto per quadrature.

<u>Esercizio 2.</u> Una particella di massa m e di carica q è vincolata a muoversi su una guida liscia di equazione $y = A \sin \omega x$. La particella è soggetta alla forza peso $\mathbf{F}_g = (0, -mg)$ e al campo elettrico $\mathbf{E} = (E_0 \cos \omega x, 0)$.

- Si determini l'energia potenziale associata alla forza attiva conservativa totale che agisce sulla particella.
- Si scriva la Lagrangiana del sistema.
- Si ricavino le equazioni di Eulero-Lagrange.
- Si studi qualitativamente il moto (in particolare, si identifichino i punti di equilibrio, se ne studi la stabilità e si disegnino le traiettorie del sistema nell'opportuno piano delle fasi) e lo si risolva per quadrature.

<u>Esercizio 3.</u> Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso sulla superficie di un cono di semiampiezza al vertice $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, con asse in direzione verticale e vertice rivolto verso il basso, come in figura.



1. Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate sferiche centrate nel vertice del cono: in altre parole, si scelgano come coordinate parametriche la distanza $\rho > 0$ dal vertice del cono, e l'angolo azimutale ϕ, come in figura.

2. Si scriva la Lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(\rho, \phi, \dot{\rho}, \dot{\phi})$. Si riconosca che ϕ è una variabile ciclica.

3. Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica E e il momento coniugato alla variabile ciclica ϕ, che chiameremo A.

4. Usando la conservazione di A, si elimini la dipendenza di $\dot{\phi}$ nell'espressione di E, e si esprima cosí l'energia meccanica del sistema in funzione di $\rho, \dot{\rho}$ e di A nella forma $E = m\dot{\rho}^2/2 + V_{eff}(\rho)$: qual è l'espressione del potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$?

5. Si studi il grafico di V_{eff} e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.

6. Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

<u>Esercizio 4.</u> Si consideri un punto materiale di massa m vincolato a muoversi su una superficie ellissoidale di equazione

$$2(x^2 + y^2) + z^2 = R^2,$$

sottoposto all'azione della gravità e collegato agli estremi dell'ellissoide $(0, 0, \pm R)$ tramite due molle di costante elastica k.

1. Si parametrizzi l'ellissoide usando coordinate cilindriche, i.e., nella forma $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \rho(z)\cos\theta \\ \rho(z)\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$

   con $\rho(z) = \sqrt{\frac{R^2 - z^2}{2}}$, $z \in [-R, R]$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Si scriva quindi la Lagrangiana del sistema in termini delle coordinate (z, θ) e delle loro derivate.

2. Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.

3. Si riconosca che il sistema ammette una coordinata ciclica e si identifichi il momento conservato corrispondente (si chiami A il suo valore). Usando la legge di conservazione di tale momento, si esprima $\dot{\theta}$ in termini di $A, z, \dot{z}$.

4. Si scriva l'espressione dell'energia meccanica E del sistema. Si sostituisca l'espressione di $\dot{\theta}$ in termini di $A, z, \dot{z}$ ricavata al punto precedente in quella dell'energia meccanica, e si esprima quest'ultima in termini di A e delle sole variabili $(z, \dot{z})$. Si identifichi quindi il potenziale efficace $V_{eff}(z)$.

5. Si determini l'equazione delle curve di livello nel piano $(z, \dot{z})$ e se ne disegni il grafico, per $A > 0$ fissato, al variare dell'energia E. Si discuta la natura qualitativa del moto della variabile z.

6. Si determinino le condizioni sui dati iniziali affinché il moto *complessivo* del sistema sia periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito. Esistono dati iniziali per cui il moto complessivo non è periodico? Se sì, qual è la natura di tali moti non periodici?

<u>Esercizio 5.</u> Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso sulla superficie di un paraboloide di equazione cartesiana $z = (x^2 + y^2)/\ell$, dove ℓ è una costante positiva.

1. Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate polari sul piano orizzontale, i.e., usando coordinate $\rho,\ \theta$ tali che $x = \rho\cos(\theta)$ e $y = \rho\sin(\theta)$.

2. Si scriva la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(\rho,\ \theta,\ \dot{\rho},\ \dot{\theta})$. Si riconosca che θ è una variabile ciclica (i.e., $\mathcal{L}$ è indipendente da θ).

3. Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica E e un secondo integrale primo, $A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}$, associato alla variabile ciclica.

4. Usando la conservazione di A, si elimini la dipendenza di $\dot{\theta}$ nell'espressione di E, e si esprima così l'energia meccanica del sistema in funzione di $\rho,\ \dot{\rho}$ e di A nella forma $E = (m/2)\,\dot{\rho}\,2\,F(\rho) + V_{eff}(\rho)$, dove $F(\rho) > 0$: qual è l'espressione del potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$?

5. Si studi il grafico di V_{eff} e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.

6. Si risolva il moto per quadrature. Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.