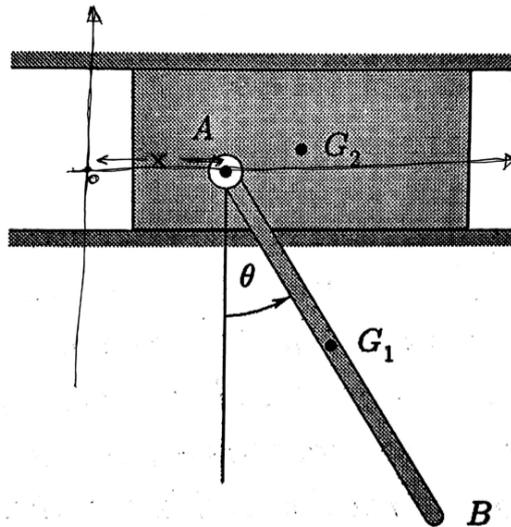


Tutorato 7 - MA/FM210 - 15/05/2018

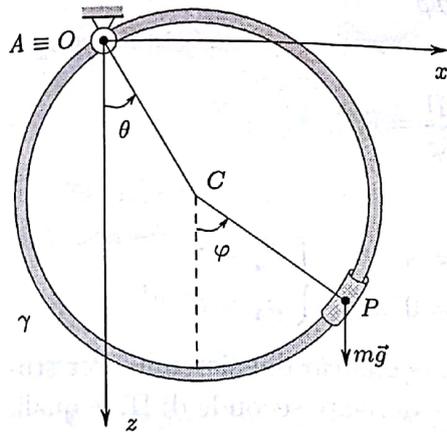
ESERCIZIO 1. Un sistema piano articolato a vincoli perfetti è costituito da una sbarra rigida rettilinea AB omogenea pesante (di lunghezza 2ℓ e massa M) collegata in A con una cerniera ad una lamina (di massa $2M$) vincolata a muoversi di moto traslatorio rettilineo in direzione orizzontale. All'istante iniziale t_0 , il sistema si trova in quiete (i.e., velocità nulla) con la sbarra in posizione orizzontale.



- Scrivere la Lagrangiana del sistema usando come coordinate Lagrangiane l'angolo θ indicato in figura e la posizione orizzontale x di A calcolata rispetto a O , come mostrato in figura.
- Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema. Si riconosca che l'energia meccanica è conservata. Inoltre, si osservi che x è una variabile ciclica e si calcoli il momento conservato corrispondente.
- Si calcolino i valori delle due grandezze conservate corrispondenti al dato iniziale assegnato. Usando le due leggi di conservazione, determinare le velocità dei baricentri G_1 della sbarra e G_2 della lamina nel primo istante t_1 successivo a t_0 nel quale la sbarra è verticale. Usando le equazioni di Eulero-Lagrange, si calcolino le accelerazioni di G_1 e G_2 all'istante t_1 .
- Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità

ESERCIZIO 2. Un sistema olonomo è formato da una circonferenza γ omogenea, di massa M centro C e raggio R , vincolata ad una cerniera passante per un punto A di γ e da un elemento P di massa m vincolato senza attrito a γ .

- Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.
- Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange e riconoscere sotto quali condizioni sono possibili moti in cui l'elemento P rimane in quiete rispetto alla circonferenza nella posizione diametralmente opposta ad A .

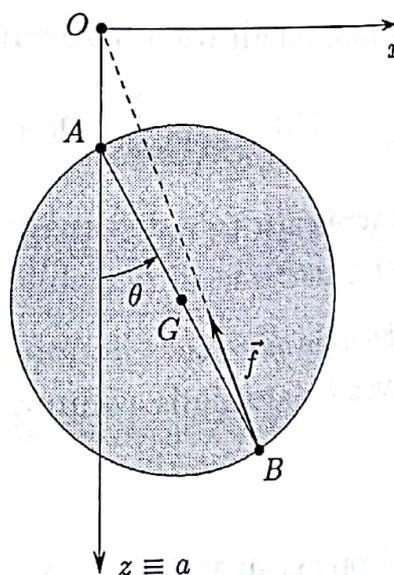


- Studiare le piccole oscillazioni intorno alla configurazione di equilibrio stabile.

Esercizio 3. Un disco rigido, omogeneo, pesante, di massa M e raggio R è vincolato ad appartenere ad un piano verticale π in modo tale che il punto A del suo bordo si mantenga sempre sulla retta verticale a di π . Sul punto B del disco, diametralmente opposto ad A , agisce una forza elastica $\mathbf{f} = k\mathbf{BO}$ con centro il punto O di a e $k = \lambda Mg/R$ ($\lambda > 0$).

Scelta come terna di riferimento la terna $(Oxyz)$ come in figura e scelte come coordinate lagrangiane l'ascissa z di A e l'anomalia θ che \mathbf{AB} forma con la verticale discendente, si chiede di:

- determinare le posizioni di equilibrio del disco e studiarne la stabilità;
- scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange;
- determinare l'accelerazione del baricentro del disco nell'istante t_0 in cui viene abbandonato dallo stato di quiete nella posizione $(\theta = 0; z = R)$, usando le equazioni di Eulero-Lagrange.



Esercizio 4. Un sistema olonomo è costituito da:

1. una lamina rettangolare $ABCD$ di lati 2ℓ e 4ℓ , omogenea, di massa M , vincolata a muoversi nel piano verticale (x, y) mantenendo uno dei suoi lati maggiori sovrapposto all'asse x ;
2. una sbarra ST , rettilinea, omogenea, di massa m e lunghezza ℓ , i cui estremi sono vincolati a scorrere senza attrito sugli assi del rettangolo.

Sul vertice A della lamina agisce una forza elastica $\mathbf{f} = k\mathbf{AK}$ di centro il punto $K \equiv (0, 3\ell)$. Si assumano come coordinate lagrangiane l'ascissa x del punto A e l'anomalia di rotazione θ della sbarra rispetto alla verticale ascendente.

- Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange.
- Ponendo $M = m$ e $k = 3Mg/(2\ell)$, studiare le piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio stabile $\theta = 0, x = 0$.
- Nelle ipotesi del punto precedente, supponendo che all'istante t_0 il sistema si trovi in quiete nella configurazione corrispondente a $x = 0, \theta = \pi/4$, determinare nel medesimo istante le due forze vincolari \mathbf{r}_T e \mathbf{r}_S che la lamina esercita sugli estremi della sbarra (si usino l'equazione della dinamica e le equazioni di Eulero-Lagrange).

