Tutorato 8 - MA/FM210 - 22/05/2018

Esercizio 1. Per $q > 0$ si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{2q^2} - \log q$$

1. Determinare l'Hamiltoniana.
2. Determinare le equazioni di Hamilton.
3. Determinare la trasformazione canonica generata dalla funzione generatrice di seconda specie $F(q,P) = P\log q$.
4. Usare la trasformazione canonica trovata al punto precedente per integrare le equazioni del moto con dati iniziali $q(0) = 1$, $p(0) = 0$.

Esercizio 2. Si consideri l'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2}e^{-2q}$$

1. Determinare le equazioni del moto.
2. Determinare la Lagrangiana associata.
3. Determinare la trasformazione canonica generata dalla funzione generatrice di prima specie $F(q,Q) = Q^2e^q$ e determinare la nuova Hamiltoniana.
4. Usare la trasformazione canonica trovata al punto precedente per risolvere le equazioni con dati iniziali $q(0) = 0$, $p(0) = 1$.

Esercizio 3. Si consideri la Lagrangiana $\mathcal{L}(q,\dot{q}) = q\dot{q}^2$

1. Per quali valori di q la Lagrangiana $\mathcal{L}$ è regolare?
2. Determinare l'Hamiltoniana associata e le corrispondenti equazioni di Hamilton.
3. Si dimostri che la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \frac{p^2}{4q} \\ P = -\frac{4q^2}{3p} \end{cases}$$

è canonica, mostrando che è la trasformazione associata alla funzione generatrice di seconda specie $F(q,P) = -\frac{4}{9}\frac{q^3}{P}$. Su quale dominio è definita la trasformazione?. Determinare l'Hamiltoniana nelle nuove coordinate.

4. Usare la trasformazione canonica del punto precedente per risolvere le equazioni del moto con dato iniziale $q(0) = 1$, $\dot{q}(0) = 2/3$.

Esercizio 4.

1. Data l'Hamiltoniana
$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{q})$$
con $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^6$, si verifichi che, se $U(\mathbf{q})$ è invariante rispetto a rotazioni attorno all'asse $\hat{e}_3$ (i.e., $U(\mathbf{q}) = V(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}, q_3)$, per un'opportuna funzione V), allora la parentesi di Poisson di H con la terza componente del momento angolare $l_3 = (\mathbf{q} \wedge \mathbf{p})_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1$ è uguale a zero.

2. Si verifichi che $\{l_1, l_2\} = l_3$, $\{l_2, l_3\} = l_1$, $\{l_3, l_1\} = l_2$. Si dimostri quindi che se il potenziale U dell'Hamiltoniana al punto precedente è invariate per rotazioni sia attorno all'asse $\hat{e}_3$, che attorno all'asse $\hat{e}_1$, allora tutte e tre le componenti di $\mathbf{l} = \mathbf{q} \wedge \mathbf{p}$ sono integrali primi del moto.

Esercizio 5. Per $q > 0$ si consideri la Lagrangiana
$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2q^2}\left[1 + \left(\frac{\dot{q}}{q^2}\right)^2\right]$$

1. Determinare l'Hamiltoniana.
2. Determinare le equazioni di Hamilton.
3. Si determini la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice di seconda specie $S(q, P) = \frac{P}{2q^2}$ e si calcoli l'Hamiltoniana nelle nuove variabili (Q, P), nonchè le nuove equazioni di Hamilton.
4. Si usino le nuove variabili per risolvere il moto corrispondente ai dati iniziali $q(0) = 1, p(0) = 0$.
5. Si verifichi esplicitamente che tale soluzione risolve le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana originale.

Esercizio 6. Si consideri la Lagrangiana
$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2 q^4}{2} - \frac{q^3}{3}$$

1. Determinare l'Hamiltoniana.
2. Determinare le equazioni di Hamilton.
3. Si determini la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice di seconda specie $S(q, P) = \frac{Pq^3}{3}$ e si calcoli l'Hamiltoniana nelle nuove variabili (Q, P), nonchè le nuove equazioni di Hamilton.
4. Si usino le nuove variabili per risolvere il moto corrispondente ai dati iniziali $q(0) = 1, p(0) = 0$.
5. Si verifichi esplicitamente che tale soluzione risolve le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana originale.