Tutorato 1 (13/3/2018)

Esercizio 1 Si consideri la forza posizionale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come segue:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} kx_1 \cos^2 ax_3 \\ kx_2 \cos^2 ax_3 \\ -\frac{ak}{2}(x_1^2 + x_2^2) \sin 2ax_3 \end{pmatrix},$$

dove k e a sono parametri positivi. Si stabilisca se $\mathbf{F}$ è conservativa e, in caso, si determini l'energia potenziale corrispondente.

Esercizio 2 Si consideri la forza posizionale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^2$ definita come segue:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} ax_2 \frac{x_2^2 - x_1^2}{|\mathbf{x}|^4} \\ ax_1 \frac{x_1^2 - x_2^2}{|\mathbf{x}|^4} \end{pmatrix},$$

dove a è un parametro positivo. Si stabilisca se $\mathbf{F}$ è conservativa e, in caso, si determini l'energia potenziale corrispondente.

Esercizio 3 Si consideri il moto di un punto materiale di massa m in una dimensione, soggetto ad un potenziale $V(x)$:

$$m\ddot{x} = -V'(x),$$

con

$$V(x) = V_0\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \frac{x}{\ell}\right],$$

dove V_0 e ℓ sono costanti positive.

- Trovare i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.
- Nel caso di punti di equilibrio stabile corrispondenti a minimi stretti non degeneri, si derivi l'equazione linearizzata e si calcoli la frequenza angolare delle piccole oscillazioni.

Esercizio 4 Si consideri il moto di un punto materiale di massa m in una dimensione, soggetto ad un potenziale $V(x)$:

$$m\ddot{x} = -V'(x),$$

con

$$V(x) = V_0\left(\frac{\ell}{x}\right)^6 - 2V_0\left(\frac{\ell}{x}\right)^4 + \frac{L^2}{2mx^2},$$

dove V_0, ℓ sono costanti positive, e L è un parametro.

- Trovare i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità, al variare di $L > 0$.
- Nel caso di punti di equilibrio stabile corrispondenti a minimi stretti non degeneri, si derivi l'equazione linearizzata e si calcoli la frequenza angolare delle piccole oscillazioni.

Esercizio 5 Si consideri il moto di un punto materiale di massa m in due dimensioni, soggetto ad un potenziale $V(\mathbf{x})$:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{V_0}{4}\left[(|\mathbf{x}|/\ell)^2 - 1\right]^2 - Ex_1$$

dove V_0, ℓ e E sono costanti positive. Si supponga inoltre che $0 < E < \frac{2V_0}{3\sqrt{3}\,\ell}$.

- Trovare i punti di equilibrio del sistema (in termini delle tre radici di un'equazione cubica) e studiarne la stabilità.
- Nel caso di punti di equilibrio stabile corrispondenti a minimi stretti non degeneri, si derivi l'equazione linearizzata e si calcoli la frequenza angolare delle piccole oscillazioni.

Esercizio 6 Si consideri il moto di un punto materiale di massa m in due dimensioni, di coordinate $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, soggetto ad un potenziale $V(\mathbf{x})$:

$$V(\mathbf{x}) = A(x_1 + x_2)^3 + B|\mathbf{x}|^2 + C(x_1 - x_2),$$

dove A, B, C sono costanti positive.

- Trovare i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.
- Nel caso di punti di equilibrio stabile corrispondenti a minimi stretti non degeneri, si derivi l'equazione linearizzata e si calcoli la frequenza angolare delle piccole oscillazioni.