4^o tutorato - FM210/MA - 17/4/2018

Esercizio 1 Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema bidimensionale di Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_2 - 2q_1q_2$$

e trovarne esplicitamente la soluzione.

Esercizio 2 Si consideri un pendolo costituito da una molla di lunghezza di riposo ℓ sospesa a un punto di sospensione O, al cui estremo libero è appesa una massa m (vedi Fig.1). Si scriva la Lagrangiana del sistema usando le coordinate x e θ, dove $\ell + x$ è la lunghezza della molla e θ l'angolo formato con la verticale verso il basso, come in figura. Si determinino le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.

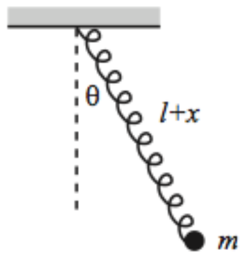

Figure 1

Esercizio 3 Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema tridimensionale di Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - eV(\mathbf{x}) + e\dot{x}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{x}),$$

dove $V(\mathbf{x})$ e $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ sono funzioni assegnate di $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ (V è una funzione scalare, a valori in $\mathbb{R}$, mentre $\mathbf{A}$ è una funzione vettoriale, a valori in $\mathbb{R}^3$). Si riconosca che le equazioni del moto coincidono con le equazioni del moto di una particella di carica e in un campo elettrico $\mathbf{E} = \nabla V$ e campo magnetico $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$.

Esercizio 4 Stabilire che forma assumono le equazioni di Newton $m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla\mathbf{U}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, in coordinate sferiche. A tale scopo, usare la trasformazione di coordinate

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \equiv \mathbf{f}(r,\theta,\phi),$$

e determinare la Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}(r,\theta,\phi,\dot{r},\dot{\theta},\dot{\phi})$ corrispondente alla Lagrangiana meccanica $\mathcal{L}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - U(\mathbf{x})$ nelle nuove coordinate. Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}(r,\theta,\phi,\dot{r},\dot{\theta},\dot{\phi})$. Si riconosca che, se il potenziale $V(r,\theta,\phi) = U(\mathbf{f}(r,\theta,\phi))$ dipende dalle sole variabili r e θ, allora il sistema ammette una grandezza conservata, e si determini tale grandezza. Analogamente, se $V(r,\theta,\phi)$ dipende dalla sola variabile r, allora il sistema ammette due grandezze conservate; si determinino tali grandezze.

Esercizio 5 (Legge di Snell)

Un raggio di luce si propaga in una regione bidimensionale di coordinate $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ con velocità dipendente dal punto: $v(\mathbf{x}) = c/n(x)$, dove $n(x) \geq 1$ è chiamato indice di rifrazione locale, e stiamo supponendo che tale indice sia una funzione della sola coordinata orizzontale x.

Secondo il *principio di Fermat*, il raggio di luce si propaga dal punto $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ al punto $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, con $x_1 < x_2$, in modo tale da minimizzare il tempo T di percorrenza tra i due punti. Si verifichi che, se $y = f(x)$ è l'equazione cartesiana della traiettoria seguita dal raggio di luce, allora

$$T = T[f] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + |f'(x)|^2} \frac{n(x)}{c} dx.$$

Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange corrispondente alla condizione di minimo tempo di percorrenza. Si riconosca che tale equazione implica che la seguente combinazione è conservata:

$$n(x) \sin \theta(x) = cost.,$$

dove $\theta(x)$ è l'angolo formato dalla tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto $(x, f(x))$ con l'asse orizzontale.

Esercizio 6 Determinare la forma che assume una corda pesante di lunghezza ℓ, i cui estremi sono fissati nei punti A e B del piano verticale $x - y$ (tale forma definisce una curva chiamata *c*atenaria). A tale scopo, si determini la curva passante in A e B che minimizza l'energia potenziale gravitazionale, tra tutte quelle a lunghezza fissata ℓ. Si proceda come segue:

- Si mostri che il problema corrisponde a minimizzare il funzionale

  $$A^{\mathcal{L}}_{0,b_1}(q) = \int_0^{b_1} \mathcal{L}(q(x), \dot{q}(x)) dx, \qquad \mathcal{L}(q(x), \dot{q}(x)) := -(\lambda - g\rho q)\sqrt{1 + \dot{q}^2}$$

  nello spazio delle curve $\mathcal{M}_{0,b_1}(0, b_2)$. Qui $\mathbf{g} = (0, -g)$ è l'accelerazione di gravità, ρ la densità lineare della corda, e λ una costante (moltiplicatore di Lagrange) che va fissata in modo tale che la lunghezza totale della curva $\int_0^{b_1} \sqrt{1 + \dot{q}^2(x)} dx$ sia uguale ad ℓ. [Suggerimento: si osservi che l'energia potenziale gravitazionale di un elemento $d\ell$ di curva attorno a $(x, q(x))$ è $\rho g \sqrt{1 + \dot{q}^2(x)}$.]
- Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange per la curva ottimale.
- Mostrare che tale equazione è risolta da un coseno iperbolico di ampiezza opportuna.