

V Appello - Equazioni differenziali della fisica

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

26 Settembre 2008

Esercizio 1

Sia $B = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$ la palla unitaria in \mathbb{R}^n e siano $(\partial B)_\pm$ le due seguenti componenti del bordo ∂B :

$$(\partial B)_\pm = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1, \pm x_n \geq 0\}.$$

Sia u una soluzione di

$$\begin{cases} \Delta u + x \cdot \nabla u = -1 & \text{in } B \\ u = 0 & \text{su } (\partial B)_- \\ \nabla u \cdot n = -u + 1 & \text{su } (\partial B)_+, \end{cases}$$

ove $n(x)$ è il versore normale esterno in $x \in \partial B$. Mostrare che $u \geq 0$ in B e $u > 0$ su $(\partial B)_+$.

Sugg.: Osservare che, se u raggiunge il minimo assoluto su B in $x_0 \in \partial B$, allora $\nabla u(x_0) \cdot n(x_0) \leq 0$.

Esercizio 2

Determinare la soluzione $u(x, y)$ dell'equazione

$$(x + y)u_x + (y - x)u_y = yu$$

tale che la curva $s \rightarrow \gamma(s) = (s, s + 2, 2e^{s+1})$ appartenga al grafico di u .

Esercizio 3

Trovare la soluzione (formale) della seguente equazione:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = t^2 x(\pi - x) & \text{per } (x, t) \in (0, \pi) \times \mathbb{R} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{per } t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \sin(3x), \quad u_t(x, 0) = \min\{x, \pi - x\} & \text{per } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

Esercizio 4

Determinare la funzione di Green del quarto di palla unitaria C in \mathbb{R}^3 :

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, x, y > 0\}.$$