

# I Appello - Equazioni differenziali della fisica

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

25 Febbraio 2008

## Esercizio 1

Determinare la funzione di Green del dominio

$$Q = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1, x_1, x_2 > 0\}.$$

## Esercizio 2

Sia  $u$  la soluzione di

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

ove  $\Omega$  è un dominio simmetrico rispetto all'asse  $\{x_n = 0\}$ :  $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \Omega$  se e solo se  $(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) \in \Omega$ .

Se  $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = -\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$  per ogni  $x \in \partial\Omega$ , mostrare che anche la funzione  $u$  soddisfa  $u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = -u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$  in  $\Omega$ .

## Esercizio 3

Trovare la soluzione (formale) della seguente equazione:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = t \sin x & \text{per } (x, t) \in (0, \pi) \times \mathbb{R} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{per } t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \sin(2x), \quad u_t(x, 0) = x^2(\pi - x)^2 & \text{per } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

## Esercizio 4

Determinare la soluzione  $u(x, y)$  dell'equazione

$$(3x - 2y)u_x + xu_y = u + y - x$$

tale che la curva  $s \rightarrow \gamma(s) = (s, s + 1, s + 2)$  appartenga al grafico di  $u$ , e discuterne l'insieme di esistenza.