

## IV Appello - Equazioni differenziali della fisica

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

16 Luglio 2008

### Esercizio 1

Sia  $u$  una soluzione di

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = u^3 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

ove  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  è un dominio regolare e  $\lambda > 0$ . Mostrare che  $|u| \leq \sqrt{\lambda}$ .

**Sugg.:** Trovare condizioni necessarie affinché un punto  $x_0$  sia un massimo/minimo locale interno di  $u$  con valore positivo/negativo.

### Esercizio 2

Determinare la soluzione  $u(x, y)$  dell'equazione

$$(3x - 2y + 2u)u_x + (-x + 2y + 2u)u_y = 3u + y - x$$

tale che la curva  $1 < s \rightarrow \gamma(s) = (s, s^2, s^2 - \sqrt[4]{s^2 - s})$  appartenga al grafico di  $u$ . Precisare in particolare l'insieme di definizione di tale soluzione.

### Esercizio 3

Trovare la soluzione (formale) della seguente equazione:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{per } (x, t) \in (0, \pi) \times \mathbb{R} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{per } t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 2 \sin x \cos x - \sin(3x), \quad u_t(x, 0) = x^2(\pi - x) & \text{per } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

### Esercizio 4

Determinare la funzione di Green del cubo unitario  $C$  in  $\mathbb{R}^2$ :

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < 1\}.$$

**Sugg.:** E' necessario considerare una successione infinita di cariche immagine.