

III Appello - Equazioni differenziali della fisica

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

2 Luglio 2008

Esercizio 1

Sia u una soluzione di

$$\begin{cases} \Delta u = u^3 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

ove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un dominio regolare. Mostrare che $u \equiv 0$.

Sugg.: Trovare condizioni necessarie affinché un punto x_0 sia un massimo/minimo locale interno di u .

Esercizio 2

Determinare la soluzione $u(x, y)$ dell'equazione

$$(3x - y + u)u_x + 2(-x + 2y + u)u_y = 5u + y - x$$

tale che la curva $s \rightarrow \gamma(s) = (s, 2s, s)$ appartenga al grafico di u .

Esercizio 3

Trovare la soluzione (formale) della seguente equazione:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{per } (x, t) \in (0, \pi) \times \mathbb{R} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{per } t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \min\{x, \pi - x\}, \quad u_t(x, 0) = x(\pi - x) & \text{per } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

Esercizio 4

Determinare la funzione di Green del dominio

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1\}.$$

Sugg.: E' necessario considerare una successione infinita di cariche immagine.