

Esonero - Equazioni differenziali della fisica

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

8 Gennaio 2008

Esercizio 1

Determinare la funzione di Green del dominio

$$B_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1, x_n > 0\}.$$

Esercizio 2

Sia u la soluzione di

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B \\ u = \varphi & \text{su } \partial B, \end{cases}$$

ove

$$B = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}.$$

Se $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = -\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ per ogni $x \in B$, mostrare che anche la funzione u soddisfa $u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = -u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ in B .

Esercizio 3

Trovare la soluzione (formale) della seguente equazione:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = t \sin \frac{x}{2} & \text{per } (x, t) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \\ u(0, t) = u(2\pi, t) = 0 & \text{per } t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \sin(\frac{3}{2}x) \quad u_t(x, 0) = x(4\pi^2 - x^2) & \text{per } x \in (0, 2\pi). \end{cases}$$

Esercizio 4

Determinare la soluzione $u(x, y)$ dell'equazione

$$(x + 2y)u_x + (2x + y)u_y = u + y - x$$

tale che la curva $s \rightarrow \gamma(s) = (s, s + 1, s^2)$ appartenga al grafico di u . Discutere l'insieme di esistenza di tale soluzione u dandone un'interpretazione geometrica.