

Terza prova scritta

20 giugno 2007

1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio regolare limitato. Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ una funzione armonica. Si supponga che $u(r) > u^4(r)$ per ogni $r \in \partial\Omega$. Mostrare che $0 < u(r) < 1$ per ogni $r \in \Omega$.

2. Trovare la funzione di Green per il dominio

$$\Omega := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + y^2 < 17, \quad x < 0, \quad y < 0, \quad z \in \mathbb{R} \}$$

3. Risolvere con il metodo di Fourier

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t^3 \sin 3x, & x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin 3x \\ u_t(x, 0) = \sin^3 x \end{cases}$$

4. Risolvere

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = x \\ u_t(x, 0) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1) \end{cases}$$