**Nome:** **Cognome:**
**Matricola:** **E-mail:**

## APPELLO ESTIVO – 1 LUGLIO 2010

- **Motivare il lavoro svolto**
- **È vietato l'uso di calcolatrici, libri e appunti**

**Esercizio 1.**
Sia $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ il semipiano superiore aperto. Si dimostri che:

1. la soluzione al problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) = 0 \,, & \forall \mathbf{x} \in \Omega \,, \\ u(x_1, 0) = f(x_1) \,, & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \,, \end{cases} \tag{1}$$

   con $f$ continua e limitata è unica nello spazio delle funzioni $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \cap L_\infty(\Omega)$;

2. la soluzione della (1) nello spazio delle funzioni $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ non è unica [Suggerimento: si esibisca una soluzione non nulla del problema con condizioni al bordo nulle].

**Esercizio 2.**
Si risolva il problema di Dirichlet (1) dell'esercizio precedente, nel caso in cui $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \cap L_\infty(\Omega)$ e $f(x) = e^{-x^2}$.

**Esercizio 3a.**
Risolvere l'equazione del calore unidimensionale $u_t - Du_{xx} = 0$ per $(x, t) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$, con condizioni al bordo $u(0, t) = 0$ e dato iniziale $u(x, 0) = xe^{-x}$.

**Esercizio 3b.**
Risolvere l'equazione delle onde unidimensionale $u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$ per $(x, t) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ con condizioni al bordo di Neumann $u_x(0, t) = 0$ e dati iniziali $u(x, 0) = x^2 e^{-x}$, $u_t(x, 0) = 0$.