Nome: **Cognome:**
Matricola: **E-mail:**

APPELLO INVERNALE – 2 FEBBRAIO 2011

- **Motivare il lavoro svolto**
- **È vietato l'uso di calcolatrici, libri e appunti**

Esercizio 1.
Sia $\Omega = \{\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}\ ,\ -\frac{L}{2} < y < \frac{L}{2}\ ,\ -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2}\}$ un cubo di lato L aperto. Si risolva il seguente problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{r}) = 0\ , & \forall \mathbf{r} \in \Omega\ , \\ u(-\frac{L}{2}, y, z) = u(\frac{L}{2}, y, z) = \big(\cos\frac{\pi y}{L}\big)\big(\cos\frac{\pi z}{L}\big)\ , & \\ u(x, -\frac{L}{2}, z) = u(x, \frac{L}{2}, z) = 0\ , & \\ u(x, y, -\frac{L}{2}) = u(x, y, \frac{L}{2}) = 0\ . & \end{cases} \tag{1}$$

Esercizio 2.
Sia $\Omega = \{\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > R^2,\ x > 0,\ y > 0\}$ la regione del primo quadrante del piano cartesiano, esterna al cerchio di raggio R centrato nell'origine. Si risolva il seguente problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{r}) = 0\ , & \forall \mathbf{r} \in \Omega\ , \\ u(R\cos\theta, R\sin\theta) = U_0\ \sin^2\theta \cdot \cos^2\theta, & \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]\ , \\ u(0, y) = 0\ , & \forall y \geq R\ , \\ u(x, 0) = 0\ , & \forall x \geq R \end{cases} \tag{2}$$

e con condizioni al bordo $\lim_{|\mathbf{r}|\to\infty} u(\mathbf{r}) = 0$ all'infinito.

Esercizio 3a.
Risolvere l'equazione del calore unidimensionale $u_t - Du_{xx} = 0$ per $(x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty)$, con condizioni al bordo $u(0, t) = u(1, t) = 0$ e dato iniziale

$$u(x, 0) = \begin{cases} x\ , & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}]\ , \\ 1 - x\ , & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1]\ . \end{cases}$$

Esercizio 3b.
Risolvere l'equazione delle onde unidimensionale $u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$ per $(x, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ con condizioni al bordo $u(0, t) = u(1, t) = 0$ e dati iniziali $u(x, 0) = \sin \pi x$,

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} x\ , & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}]\ , \\ 1 - x\ , & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1]\ . \end{cases}$$