

Nome:
Matricola:

Cognome:
E-mail:

APPELLO AUTUNNALE – 13 SETTEMBRE 2010

- Motivare il lavoro svolto
- È vietato l'uso di calcolatrici, libri e appunti

Esercizio 1.

1. Determinare la funzione di Green dell'operatore di Laplace sul dominio

$$\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0, \quad x_2 > 0\}$$

con condizioni al bordo nulle.

2. Si determini la soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega)$ al problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(x_1, 0, x_3) = 0, \\ u(0, x_2, x_3) = x_2 e^{-(x_2^2 + x_3^2)}. \end{cases}$$

Esercizio 2. Siano: $R > 0$ e $\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0, \quad x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$. Si determini la soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ al problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(R \cos \theta, R \sin \theta) = V_0 \sin^2 \theta, & \forall 0 < \theta < \pi, \\ u(x_1, 0) = 0, & \forall |x_1| \leq R. \end{cases}$$

Esercizio 3a.

1. Risolvere l'equazione del calore unidimensionale $u_t - Du_{xx} = 0$ per $(x, t) \in [0, L] \times [0, \infty)$, con condizioni al bordo nulle $u(0, t) = u(L, t) = 0$ e dato iniziale $u(x, 0) = x(x - L) \sin^2(\pi x/L)$.
2. Si discuta come cambia la soluzione se invece di condizioni al bordo nulle si assumono condizioni al bordo di Neumann $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$.

Esercizio 3b.

1. Risolvere l'equazione delle onde unidimensionale $u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$ per $(x, t) \in [0, L] \times [0, \infty)$, con condizioni al bordo nulle $u(0, t) = u(L, t) = 0$ e dati iniziali $u(x, 0) = x(x - L) \sin^2(\pi x/L)$, $u_t(x, 0) = \sin^2(\pi x/L)$.
2. Si discuta come cambia la soluzione se invece di condizioni al bordo nulle si assumono condizioni al bordo di Neumann $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$.