Primo esonero:
Trasformazioni conformi in elettrostatica

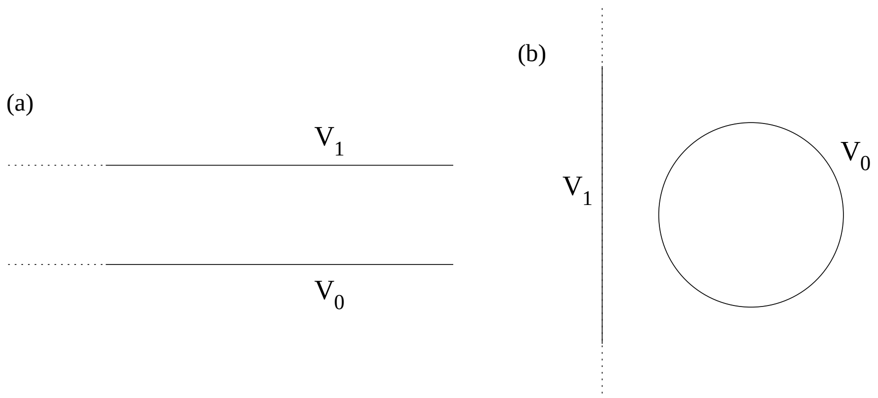
1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio piano in cui è definito il potenziale elettrostatico $v(x, y)$ (che soddisfa l'equazione di Laplace $\Delta v = 0$). Si dimostri che l'energia elettrostatica $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\int_\Omega |\underline{\partial} v|^2$ è invariante conforme. In altre parole, si consideri il cambio di coordinate $(x, y) \to (x', y') = F(x, y)$ indotto dalla trasformazione conforme $z' = f(z)$, con f analitica, $z = x + iy$ e $z' = x' + iy'$; si dimostri che $\int_\Omega |\underline{\partial} v(x, y)|^2 dxdy = \int_{\Omega'} |\underline{\partial} V(x', y')|^2 dx'dy'$, con $V = v \circ F^{-1}$ e Ω' l'immagine di Ω attraverso F.

2. Si calcolino le equazioni delle linee equipotenziali generate da:

   (a) un condensatore i cui piatti sono due rette parallele semi-infinite;

   (b) un condensatore i cui piatti sono una retta infinita e un cerchio.

   Inoltre, usando il risultato del punto (1), si calcolino le capacità dei condensatori (a) e (b).



[Suggerimenti:

- Per calcolare la capacità C di un condensatore, si ricordi che $\mathcal{E} = \frac{1}{2}C(V_1 - V_0)^2$.

- Per calcolare le linee equipotenziali di (a), si usi che $z = z' + e^{z'}$ mappa le rette semi-infinite $r_\pm = \{x \leq -1, y = \pm\pi\}$ nelle rette infinite $r'_\pm = \{x' \in \mathbb{R}, y' = \pm\pi\}$ e corrispondentemente mappa $\mathbb{C} \setminus \{r_- \cup r_+\}$ nella regione $\{x' \in \mathbb{R},\ -\pi < y' < \pi\}$.

- Per calcolare le linee equipotenziali di (b), si cerchi la trasformazione di Moebius che mappa (b) in un condensatore "cilindrico", formato da due cerchi concentrici di raggi, e.g., r e 2 (con $0 < r < 2$).]