

• **INTRODUZIONE**

- Equazioni differenziali alle derivate parziali: generalità. Equazioni della fisica matematica. Classificazione delle equazioni lineari del second'ordine (cenni).

• **L'EQUAZIONE DI LAPLACE**

- Il laplaciano in un sistema di coordinate ortogonale. Il laplaciano in coordinate sferiche e cilindriche. La soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace in dimensione due e tre.
- Funzioni armoniche in 2D e funzioni analitiche di singola variabile complessa. I polinomi armonici in 2D.
- Cambi di coordinate conformi. Le trasformazioni lineari fratte (trasformazioni di Moebius): invarianza per traslazioni, rotazioni, dilatazioni e inversioni rispetto a cerchi.
- Polinomi armonici in tre dimensioni: calcolo del numero di polinomi indipendenti di grado  $n$ . Costruzione di una base di polinomi armonici Polinomi di Legendre e armoniche sferiche. Sviluppo di funzioni sulla sfera in armoniche sferiche.
- Covarianza del Laplaciano e delle funzioni armoniche in 3D sotto traslazioni, rotazioni, dilatazioni e inversioni rispetto a sfere.
- La funzione di Green nello spazio: calcolo euristico (per trasformata di Fourier).
- La funzione di Green e la soluzione del problema di Poisson nello spazio.
- Il problema di Poisson in un dominio limitato. Il problema di Dirichelet in un dominio limitato. La funzione di Green di un dominio.
- Il teorema di rappresentazione. Il teorema della media. Il principio del massimo.
- Unicità e continuità rispetto ai dati iniziali della soluzione del problema di Dirichelet in un dominio limitato.
- Esistenza della soluzione del problema di Dirichelet nella sfera: costruzione della funzione di Green, formula risolutiva in termini del nucleo di Poisson e dello sviluppo in armoniche sferiche.
- Esistenza e unicità della soluzione con condizioni al contorno continue (o continue a tratti).
- Soluzione (per serie, via espansione in armoniche sferiche) del problema di Dirichelet nella sfera con condizione al bordo  $V_1$  sull'emisfero nord e  $V_2$  sull'emisfero sud. Equazione ricorsiva per i polinomi di Legendre.
- Esistenza della soluzione del problema di Dirichelet nel cerchio: costruzione della funzione di Green, formula risolutiva in termini del nucleo di Poisson e dello sviluppo in serie di Fourier. Soluzione (per serie, via espansione in seni e coseni) del problema di Dirichelet nel cerchio con condizione al bordo  $V_1$  sul semicerchio positivo e  $V_2$  sul semicerchio negativo.
- Il metodo delle cariche immagine: calcolo del potenziale generato da una carica puntiforme in presenza di un conduttore sferico a terra. Calcolo della superficie di carica indotta sul conduttore. Calcolo della forza di attrazione tra carica e conduttore. Il caso di una carica puntiforme in presenza di una lastra conduttrice piana.
- Disuguaglianza di Harnack e teorema di Liouville.
- Teorema di Earnshaw.
- Equivalenza tra funzioni armoniche e funzioni che soddisfano il teorema della media.
- Le funzioni armoniche sono localmente analitiche.

- Sull'esistenza della soluzione al problema di Dirichelet in domini generici: cenni al controesempio di Lebesgue, enunciato del teorema di esistenza.
- La strategia della dimostrazione del teorema di esistenza nel caso di domini regolari di classe  $C^2$ : potenziali di strato e doppio strato; discontinuità del potenziale e del campo elettrico alla superficie; il problema di Dirichelet in termini di un'equazione integrale (ricerca del potenziale di doppio strato che generi il dato al bordo assegnato); l'alternativa di Fredholm; unicità della soluzione dell'equazione integrale omogenea.

#### • L'EQUAZIONE DEL CALORE

- Derivazione macroscopica: conservazione dell'energia e legge di Fourier. Derivazione microscopica: il cammino aleatorio.
- La funzione di Green (il nucleo del calore) in dimensione generica: calcolo euristico (per trasformata di Fourier).
- La funzione di Green e la soluzione dell'equazione del calore in dimensione generica.
- Principio del massimo. Unicità della soluzione e dipendenza continua dai dati iniziali su un dominio limitato.
- Unicità delle soluzioni limitate su  $\mathbb{R}^d$ .
- Esistenza e costruzione per separazione di variabili della soluzione dell'equazione del calore su un segmento finito.

#### Testi consigliati:

- E. C. Zachmanoglou, D. W. Thoe: *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*, Dover Publications, 1986.
- A. N. Tikhonov and A. A. Samarskii: *Equations of Mathematical Physics*, Dover. Traduzione italiana pubblicata da MIR.
- B. M. Budak, A. N. Tikhonov and A. A. Samarskii: *A collection of problems in Mathematical Physics*, Dover. Oppure: A. N. Tikhonov and A. A. Samarskii: *Problemi della fisica matematica*, MIR.
- V. I. Smirnov: *Corso di Matematica Superiore, Volume terzo, parte seconda*, Editori Riuniti.
- S. Salsa: *Equazioni a derivate parziali: Metodi, Modelli e Applicazioni*, Springer, 2004.
- E. DiBenedetto: *Partial Differential Equations*, Birkhäuser, 1995.
- L. C. Evans: *Partial differential equations*, AMS, 1998.
- M. Pulvirenti: *Appunti del corso di Fisica Matematica*, A.A. 2007/2008, disponibile su [http://www.mat.uniroma1.it/mat\\_cms/pres\\_corso.php?corso\\_da\\_presentare=1037&lingua=italiano](http://www.mat.uniroma1.it/mat_cms/pres_corso.php?corso_da_presentare=1037&lingua=italiano)
- E.H. Lieb, M. Loss: *Analysis*, AMS.