Secondo esonero:
Problemi di Dirichelet in elettrostatica 3D

1. Consideriamo una superficie sferica conduttrice isolata e scarica in un campo elettrico uniforme $\vec{E}_0$.

   (a) Si calcoli il potenziale elettrostatico in tutto lo spazio (i.e., si risolva l'equazione di Laplace con condizioni al bordo $u = V_0$ =cost. sulla superficie sferica e $u(\vec{x}) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{x}$ all'infinito; si scelga poi V_0 in modo che la carica totale sulla sfera sia 0).

   (b) Si calcoli la densità di carica indotta sulla superficie del conduttore.

   (c) Si supponga ora di dividere la superificie sferica in due semisfere, con un taglio perpendicolare a $\vec{E}_0$. Si calcoli la forza necessaria a separare le due semisfere l'una dall'altra.

2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il cubo aperto di lato L: $\Omega = \{-\frac{L}{2} < x_i < \frac{L}{2} \quad i = 1, 2, 3\}$.

   (a) Si risolva il problema di Dirichelet in Ω con condizioni al bordo:
   - $u(\pm\frac{L}{2}, x_2, x_3) = 0$, $-\frac{L}{2} < x_2, x_3 < \frac{L}{2}$;
   - $u(x_1, \pm\frac{L}{2}, x_3) = 0$, $-\frac{L}{2} < x_1, x_3 < \frac{L}{2}$;
   - $u(x_1, x_2, \pm\frac{L}{2}) = a > 0$, $-\frac{L}{2} < x_1, x_2 < \frac{L}{2}$.

   (Suggerimento: si cerchi la soluzione per serie, usando come base di funzioni le soluzioni del problema di Dirichelet della forma fattorizzata $f(x_1)g(x_2)h(x_3)$, con condizioni al bordo $f(\pm L/2) = g(\pm L/2) = 0$ e $h(L/2) = h(-L/2) \neq 0$).

   (b) Si verifichi numericamente che $u(0, 0, 0) = a/3$ entro un errore relativo di 10^{-4}.

   (c) Si dimostri che $u(0, 0, 0) = a/3$. Piú in generale, si dimostri che se Ω_n è un solido platonico a n facce (n=4,6,8,12,20) e u è la soluzione del problema di Dirichelet con condizioni al bordo $V_1, \ldots, V_n$ sulle n facce (qui V_i sono costanti arbitrarie) allora $u(centro) = \frac{V_1+\cdots+V_n}{n}$.