Terzo esonero:
L'equazione del calore in 1D e in 3D

1. Risolvere l'equazione del calore sulla semiretta $x \geq 0$:

$$\partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t) \ , \qquad x \geq 0 \ , \quad t > 0 \ ,$$

con dato inizile $u(x,0) = T_0 e^{-x}$ e condizione al bordo $u(0,t) = T_0 \cos(\omega t)$.

2. Risolvere il problema del raffreddamento di una sfera di raggio R la cui superficie ha temperatura nulla, nel caso in cui il profilo iniziale di temperatura nella sfera è dato da:

$$u(\mathbf{x},t) = T_0 \frac{\sin(\pi|\mathbf{x}|/R)}{(\pi|\mathbf{x}|/R)} \ .$$

[Suggerimento: si cerchi la soluzione per serie, usando come base di funzioni le soluzioni dell'equazione del calore della forma fattorizzata $h(t)a(r)Y_n(\theta,\phi)$, con $Y_n(\theta,\phi)$ un'armonica sferica di ordine n, $n \geq 0$. Con la sostituzione $a(r) = y(r)/\sqrt{r}$, l'equazione per la parte radiale si riduce all'equazione di Bessel di ordine $n + 1/2$:

$$y'' + \frac{1}{r} y' + \Big[k^2 - \frac{(n+1/2)^2}{r^2}\Big] y = 0 \ ,$$

le cui soluzioni limitate sono tutte della forma:

$$y(r) = A J_{n+1/2}(kr) \ ,$$

con $J_{n+1/2}$ la funzione di Bessel di indice semintero $n + 1/2$ (e.g., $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$, $J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (-\cos x + \frac{\sin x}{x})$, ...). Per imporre la condizione nulla al bordo $|\mathbf{x}| = R$, si usi il fatto che l'equazione $J_{n+1/2}(x) = 0$ ha infinite radici positive di molteplicità uno, che si possono indicare con $x_1^n, x_2^n, \ldots, x_j^n, \ldots$ (e che, ad es., nel caso $n = 0$ possono essere calcolate esplicitamente: $x_j^0 = j\pi$).]