

Appello del 12/9/2008

- Motivare il lavoro svolto
- È vietato l'uso di calcolatrici, libri e appunti

Problema 1. Discutere la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie:

$$\sum_{n \geq 1} \left(\cos \frac{x}{n} - \cos \frac{x}{2n} \right).$$

Problema 2. Discutere continuità, derivabilità e differenziabilità delle seguenti funzioni $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

(i)

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} |\underline{x}|^{-1} \log(1 + |\underline{x}|), & \underline{x} \neq \underline{0}, \\ 1, & \underline{x} = \underline{0}; \end{cases}$$

(ii)

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} 1 - \underline{x}^2, & |\underline{x}| \leq 1, \\ 0, & |\underline{x}| > 1. \end{cases}$$

Problema 3. Sia γ la curva data dall'intersezione delle superfici $\{y = x^2\}$ e $\{z = x^3\}$ e limitata dai piani $\{x = 1\}$ e $\{x = 2\}$. Si dimostri che γ è una curva regolare, e si calcoli $\int_{\gamma} f ds$, dove $f(x, y, z) = (\log|z|)/(1 + 4y + 9xz)^{1/2}$.

Problema 4. Si dimostri che $f(x, y) = e^{-|x-y|} \sin(2x)$ è integrabile sull'insieme illimitato $E = \{0 < x + y < 1\}$ e si calcoli $\int_E f(x, y) dx dy$.

Problema 5. Si determini una soluzione dell'equazione differenziale $2tuu' + t^2 - u^2 = 0$ con dato iniziale $u(0) = 0$, e si discuta l'unicità di tale soluzione.