Compito di Elementi di Analisi III a.a. 2007/2008 - Sessione estiva - 19/6/2008

1) Si consideri la funzione

$$g(x) = |x|\left(\frac{1}{2} - \sin^2 x\right) , \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

e sia $f(x)$ l'ampliamento per periodicità su tutto l'asse reale della funzione $g(x)$.
Dire che tipo di sviluppo di Fourier ammette la funzione f.
Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione f.
Dire se e come la serie di Fourier associate converge e calcolarne la somma negli eventuali punti di discontinuità.

2) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(2\sin x)^{n+2}}{n+3}$$

determinarne l'insieme di convergenza. Calcolarne, se possibile, la somma sull'insieme di convergenza.

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_\gamma y\sqrt{x}dx - y \arctan x dy$$

dove γ è il segmento di parabola $y = \sqrt{x}$ tra i punti $(0,0)$ e $(1,1)$.

4) Calcolare l'integrale

$$\int_T x^2 y^2 dxdy$$

dove T è la corona circolare centrata nell'origine di raggi 1 e 2.

5) Calcolare il seguente integrale di superficie:

$$\int_\Sigma \frac{x}{\sqrt{1+\sin^2 y}} d\sigma$$

dove Σ è la porzione di superficie di equazioni

$$\Sigma : \begin{cases} x = u \cos v \ , \\ y = v \ , \\ z = \cos v \ , \end{cases} \qquad 0 \leq v \leq u \leq \frac{\pi}{2} \ .$$

6) Scrivere la soluzione del seguente problema ai dati iniziali su tutta la retta

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \quad x \in \ R \\ u(x,0) = \begin{cases} x(1-x)e^{-x^2} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Dire per quali intervalli di tempo la soluzione e' diversa da zero nel punto $x = 3$.

7) Risolvere il seguente problema ai dati iniziali in un intervallo

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + cos(\pi t)sin(2\pi x) \quad 0 \le x \le 2 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = \sin^2(\frac{\pi}{2}x) \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 \end{cases}$$