Primo Esonero - 14/11/2007

- **Motivare il lavoro svolto**
- **È vietato l'uso di calcolatrici, libri e appunti**

Problema 1.

(1) Discutere la convergenza puntuale, uniforme e totale di

$$\sum_{n\geq 1}\left(\sqrt{1+x^n}-1\right)$$

sull'insieme $[-1,+\infty)$.

(2) Calcolare la somma della serie:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{2^{n/2}(n+1)}.$$

Problema 2.

Determinare e localizzare massimo e minimo assoluti di $f(x,y,z)=xyz$ sull'insieme:

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x\geq 0,\quad y\geq 0,\quad z\geq 0,\quad x+y+z=1\}.$$

Problema 3.

Calcolare

$$\int_E xe^{2y}\ dxdy\ ,$$

dove

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1,\ y^2\leq 3x^2\}.$$

Problema 4.

Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità di

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\tan(xy)}{x^2y} & \text{se}\quad xy\neq 0\\ 1 & \text{se}\quad xy=0\end{cases}$$

Problema 5. *(Facoltativo)*

Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{\left(\sin nx\right)^2}{2^n}$$

e calcolare $\int_0^\pi f^2(x)dx$ usando l'identità di Parseval.