Secondo appello - Sessione Estiva - 9/7/2008

- **Motivare il lavoro svolto**
- **È vietato l'uso di calcolatrici, libri e appunti**

Problema 1.
a) Discutere la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie:

$$\sum_{n\geq 1} \left(n^{1/n} - 1\right)^n x^n \ .$$

b) Discutere la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan(\sqrt{n}x) \cdot \log \frac{1+nx}{nx} \ , \qquad x \in (0,1) \ .$$

Problema 2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_V \Big(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{z} \Big) dx\, dy\, dz \ ,$$

dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq 1 \ , \ x^2+y^2 \leq z^2 \ , \ z \geq 0\}$.

Problema 3. Sia

$$\omega = \frac{2x+y}{1+x^2+xy} dx + \frac{x}{1+x^2+xy} dy \ .$$

Determinare l'insieme di definizione della forma differenziale ω e dire se la forma è esatta su tale insieme. Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma(t) = \big(e^t, \sin t\big)$, $t \in [0, \pi]$.

Problema 4. Sia $f(x,y) = e^{-x^2-y}$. Determinare l'estremo superiore ed inferiore (specificando se si tratta di massimi o minimi) di f sull'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y + 2x > x^2 + 2\} \ .$$

Problema 5. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$u^{(6)} + u = \cosh t$$