Secondo appello - 15/2/2008

- **Motivare il lavoro svolto**
- **È vietato l'uso di calcolatrici, libri e appunti**

Problema 1. Discutere la convergenza puntuale, uniforme e totale di

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n^{3/4}(1+nx^2)}.$$

Problema 2. Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità di

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\cos\left(\frac{1}{xy}\right) & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

su $\mathbb{R}^2$. Si stabilisca se f è di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$.

Problema 3. Si calcoli l'area della superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \ z = \arctan(y/x), \ \ x^2+y^2 \leq 1, \ \ |y| \leq x\}.$$

Problema 4. Sia

$$\omega = \frac{y^2}{x^2+y^4}dx - \frac{2xy}{x^2+y^4}dy.$$

(1) Si stabilisca se ω è una forma esatta sul suo dominio di definizione e, in caso affermativo, se ne determini una primitiva.

(2) Si calcoli $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma(t) = (\sin t, \ 4+3\cos^2 t), \ \ t \in [0,\pi]$.

Problema 5. Si determini la soluzione al problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'' + u = (1+\cos^2 t)^{-1} \\ u(0) = 0, \ \ u'(0) = 1 \end{cases}$$

e si discuta se tale soluzione ammette un prolungamento massimale a tutto $\mathbb{R}$.