Secondo Esonero - 24/1/2008

- **Motivare il lavoro svolto**
- **È vietato l'uso di calcolatrici, libri e appunti**

Problema 1. Sia

$$\omega = \frac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2}dx + \frac{2x^2y}{(1+x^2y^2)^2}dy$$

(i) Dire se ω è esatta sul suo insieme di definizione, e in caso affermativo trovare una primitiva.
(ii) Si calcoli $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin 2t)$, $t \in [0, \pi/4]$.

Problema 2. Sia γ la curva in $\mathbb{R}^2$ definita in coordinate polari da

$$\rho(\theta) = 1 + \cos\theta \ , \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

(i) Si calcoli la lunghezza di γ.
(ii) Si calcoli l'area della regione piana racchiusa da γ e contenuta nel primo quadrante.

Problema 3. Si calcoli l'area della superficie Σ definita da:

$$\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \ |x_1| \leq 1 \ , \ \sqrt{x_2^2 + x_3^2} = 1 + \sqrt{1 - x_1^2}\}$$

Problema 4. Si calcoli l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$u^{(5)} - 2u^{(4)} + u^{(3)} - u'' + 2u' - u = e^t \ .$$

Problema 5. Si trovino due soluzioni $C^1(\mathbb{R})$ di

$$u' = 2\sqrt{u}\,\cos t \ , \qquad u(2\pi) = 0 \ .$$

Quante altre soluzioni $C^1(\mathbb{R})$ esistono di tale equazione differenziale?