Primo appello - Sessione Estiva - 19/6/2008

- **Motivare il lavoro svolto**
- **È vietato l'uso di calcolatrici, libri e appunti**

Problema 1. Discutere la convergenza puntuale, uniforme e totale di

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(e^{nx})}{\sinh(nx)+1} \, .$$

Soluzione. Innanzitutto si noti che per $x = 0$ la serie non converge (il coefficiente n-esimo è uguale identicamente a $\sin(1) \neq 0$). Per $x > 0$ il denominatore può essere stimato dal basso come segue: $1 + \sinh(nx) \geq e^{nx}/2$. Quindi:

$$\left|\frac{\sin(e^{nx})}{\sinh(nx)+1}\right| \leq 2e^{-nx}$$

e di conseguenza la serie assegnata converge puntualmente su $\mathbb{R}^+$. La stessa stima implica che la serie assegnata converge totalmente su $[\delta, +\infty)$, $\forall \delta > 0$ (infatti su tale insieme il valore assoluto del termine n-esimo è stimato dall'alto da $2e^{-n\delta}$, che è il termine n-esimo di una serie convergente). D'altra parte la serie NON converge uniformemente su $\mathbb{R}^+$, poiché

$$\sup_{x>0} \Big|\sum_{k\geq n} \frac{\sin(e^{nx})}{\sinh(nx)+1}\Big| = \lim_{x\to 0^+} \Big|\sum_{k\geq n} \frac{\sin(e^{nx})}{\sinh(nx)+1}\Big| = +\infty$$

Ora, se $x < 0$, è necessario imporre $x \neq -\frac{1}{k}\sinh^{-1}(1)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ (se $x = -\frac{1}{k}\sinh^{-1}(1)$ il termine k-esimo della somma sarebbe mal definito: avrebbe il denominatore nullo). D'altra parte, se $x \in I$, con $I = \{x < 0 \ : \ x \neq -\frac{1}{k}\sinh^{-1}(1) \ , \ k \in \mathbb{N}\}$, il denominatore può essere stimato dal basso con $1 + \sinh(nx) \geq C(x)e^{n|x|}$, per un'opportuna costante positiva $C(x)$. Ma allora la stessa dimostrazione usata per il caso $x > 0$ mostra che la serie converge puntualmente (ma non uniformemente) su I. Inoltre la serie converge totalmente su ogni chiuso contenuto in I.

Problema 2. Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità di

$$f(x,y) = \sqrt{(|x|-x)|\sin y|} + 4y$$

su $\mathbb{R}^2$.

Soluzione. f è continua su tutto $\mathbb{R}^2$, poiché combinazione continua di funzioni continue. Inoltre è derivabile infinite volte (ed in particolare è differenziabile) su $\mathbb{R}^2 \setminus J$, dove

$$J = \{(0, y_0) \ : \ y_0 \in \mathbb{R}\} \cup \{(x_0, k\pi) \ : \ x_0 \in \mathbb{R} \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$$

Rimane quindi da discutere derivabilità e differenziabilità su J.
In $(0, y_0)$, con $y_0 \neq k\pi$, la funzione non è differenziabile, poiché il limite $\lim_{h\to 0}[f(h, y_0) - 4y_0]/h$ non esiste.
In $(x_0, k\pi)$, con $x_0 \neq 0$, la funzione non è differenziabile, poiché il limite $\lim_{h\to 0}[f(x_0, k\pi + h) - 4k\pi]/h$ non esiste.
In $(0, k\pi)$ la funzione è derivabile, poichè

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h, k\pi) - 4k\pi}{h} = 0$$

e

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,k\pi+h)-4k\pi}{h}=4\,.$$

Tuttavia su tali punti la funzione non è differenziabile, poichè il limite

$$\lim_{h,k\to 0}\frac{f(h,k\pi+k)-4(k\pi+k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

non esiste

Problema 3. Data la cicloide $\gamma(t)=\big(t-\sin t,1-\cos t\big)$, $t\in[0,2\pi]$, si calcoli l'area della superficie di rotazione Σ ottenuta ruotando γ attorno all'asse $x=\pi$.

Soluzione. Una parametrizzazione equivalente della cicloide assegnata, ottenuta traslando t di π, è la seguente: $\gamma(t)=\big(\pi+t+\sin t,1+\cos t\big)$, $t\in[-\pi,\pi]$. La superficie di rotazione ottenuta ruotando γ attorno all'asse $x=\pi$ può essere parametrizzata come segue:

$$\Sigma:\begin{cases} x=\pi+(t+\sin t)\cos\theta \\ y=(t+\sin t)\sin\theta \\ z=1+\cos t\end{cases}, \qquad t\in[0,\pi]\,,\quad \theta\in[0,2\pi]$$

Se $\phi(t,\theta)=\big(x(t,\theta),y(t,\theta),z(t,\theta)\big)$, si trova che, per $t\in[0,\pi]$, $\theta\in[0,2\pi]$,

$$|\partial_t\phi\times\partial_\theta\phi|=2(t+\sin t)\cos(t/2),$$

quindi l'area di Σ è uguale a

$$4\pi\int_0^\pi dt(t+\sin t)\cos(t/2)=4\pi\Big(2\pi-\frac{8}{3}\Big)$$

Problema 4. Sia $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$. Determinare l'estremo superiore ed inferiore (specificando se si tratta di massimi o minimi) di f sull'insieme

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ xy+\frac{1}{2}\sin(xy)>1\}\,.$$

Soluzione. Si noti innanzitutto che la funzione $g(z)=z+\sin z$ è strettamente monotona crescente su tutto l'asse reale, con $\lim_{z\to\pm\infty}=\pm\infty$. Quindi esiste un unico $z^*>0$ tale che $g(z^*)=1$, il che vuol dire che l'insieme A corrisponde alla regione (illimitata) del piano tale che $xy>z^*$.

Si noti poi che $f>0$; quindi, dato che $\lim_{x\to\infty}f(x,x)=0$, si ha che $\inf_A f=\inf_{\mathbb{R}^2}f=0$. Rimane da determinare il sup. Per questo cerchiamo i punti critici interni e i punti critici vincolati sulla frontiera. Dato che $\nabla f=-\frac{2}{(x^2+y^2)^2}(x,y)$, che si annulla solo all'origine (che non appartiene ad A), non ci sono punti critici interni. Sulla frontiera $xy=z^*$ i punti critici sono soluzione del sistema

$$\begin{cases} -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}=\lambda y(1+\cos z^*) \\ -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}=\lambda x(1+\cos z^*) \\ xy=z^*\end{cases}$$

che implica immediatamente $x^2=y^2=z^*$. Si trova quindi che il sup della funzione su A non è un massimo e coincide con il valore di f in $(\pm\sqrt{z^*},\pm\sqrt{z^*})$.

Problema 5. Si determinino le soluzioni al problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'=-\frac{4u}{t}-t\sqrt{u}\,, \\ u(1)=u_0\end{cases}$$

al variare del dato iniziale $u_0 \geq 0$. Se ne discuta l'unicità locale.

Soluzione. Per ogni $u_0 > 0$, la funzione $f(t,u) = -4u/t - t\sqrt{u}$ è di classe C^∞ in un intorno di $(1, u_0)$, quindi il problema ammette un'unica soluzione locale. La soluzione può essere trovata tramite la sostituzione $z = \sqrt{u}$, che trasforma l'equazione data in

$$z' = -2z/t - t/2$$

che è un'equazione lineare del prim'ordine, il cui integrale generale è:

$$z(t) = e^{A(t)}\left(z_0 - \int_1^t ds e^{-A(s)} \frac{s}{2}\right)$$

con $A(t) = -2\log t$. In termini della funzione u, la soluzione è della forma:

$$u(t) = \left(\frac{\sqrt{u_0} + 1/8}{t^2} - \frac{t^2}{8}\right)^2$$

che, come aspettato, è localmente ben definita, in un intorno di $t = 1$.

Se $u_0 = 0$ la funzione $f(t,u)$ non è Lipschitziana in un intorno di $(1,0)$, quindi non è garantito che esista una soluzione unica. In effetti due possibili soluzioni distinte sono $u = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, e

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{64}\left(\frac{1}{t^2} - t^2\right)^2, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$$