Soluzioni Primo appello - 1/2/2008

Problema 1. Discutere la convergenza puntuale, uniforme e totale di

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+\sin^2 x + (\tan x)^{2n}} \qquad \text{su} \qquad (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Soluzione. Innanzitutto, notiamo che una condizione necessaria per la convergenza della serie è che il termine n-esimo tenda a zero per $n \to \infty$. Tale condizione implica $|\tan x| > 1$, ovvero $x \in (-\pi/2, -\pi/4) \cup (\pi/4, \pi/2)$. D'altra parte, il termine n-esimo della serie è minore di $(1/\tan^2 x)^n$, che è sommabile non appena $|\tan x| > 1$. Quindi l'insieme di convergenza puntuale coincide con $I = (-\pi/2, -\pi/4) \cup (\pi/4, \pi/2)$.

Per controllare se su I la convergenza è uniforme, bisogna controllare se $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |s_n(x) - s_\infty(x)| = 0$, dove $s_n(x)$ è la somma parziale n-esima e $s_\infty(x)$ la somma della serie. Nel nostro caso:

$$\sup_{x\in I} |s_n(x) - s_\infty(x)| = \sup_{x\in I} \sum_{k>n} \frac{1}{1+\sin^2 x + (\tan x)^{2n}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \sum_{k>n} \frac{1}{1+\sin^2 x + (\tan x)^{2n}} = +\infty$$

quindi la convergenza non è né uniforme né totale su I. D'altra parte, per ogni $\delta > 0$, è facile vedere che si ha convergenza totale (e quindi uniforme) su $I_\delta = (-\pi/2, -\arctan(1+\delta)] \cup [\arctan(1+\delta), \pi/2)$. Infatti:

$$\sum_{n\geq 0} \sup_{x\in I_\delta} \frac{1}{1+\sin^2 x + (\tan x)^{2n}} \leq \sum_{n\geq 0} (1+\delta)^{-2n} < +\infty.$$

Problema 2. Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità di

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & x \neq 0 \\ \sin y & x = 0 \end{cases}$$

nel punto $(0,0)$.

Soluzione. Per quanto riguarda la continuità in $(0,0)$, è sufficiente notare che $|f(x,y)| \leq x^2 + y^2 + |\sin y|$. Ovviamente $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2 + |\sin y|) = 0$, quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ ed f è continua in $(0,0)$.

Per studiare la derivabilità in $(0,0)$, osserviamo che:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

e quindi f è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0) = (0,1)$.

Per studiare la differenziabilità vogliamo controllare se

$$\frac{|f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

tende a 0 per $(x,y) \to (0,0)$. Notiamo che, se $x \neq 0$,

$$\frac{|f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x^2+y^2-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

che chiaramente non tende a 0, come si può verificare scegliendo, ad es., $x = y = t$ e notando che $\lim_{t\to 0} \frac{|2t^2-t|}{|t|} = \lim_{t\to 0} |1-2t| = 1$.

Problema 3. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+2y^2-xy}$$

sulla regione $K = \{x^2+y^2 \geq 1\}$.

Soluzione. Innanzitutto, notiamo che l'espressione a denominatore è sempre positiva, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e può essere stimata dal basso come segue:

$$x^2+2y^2-xy = y^2 + (y^2 - xy + \frac{x^2}{4}) + \frac{3}{4}x^2 \geq y^2 + \frac{3}{4}x^2 \geq \frac{3}{4}(x^2+y^2)$$

Quindi $f \geq 0$ su K e $\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) = 0$, da cui si vede che $\inf_K f = 0$.

Per quanto riguarda il sup, notiamo che $\sup_K f \geq f(0,1) = 1/2$, da cui si vede che il sup è assunto nella regione finita $K' = \{1 \leq x^2+y^2 \leq 3\}$, poiché, se $x^2+y^2 > 3$, sicuramente $f(x,y) < 4/9 < 1/2$. Quindi $\sup_K f = \max_{K'} f$. Tale max o è localizzato su un punto stazionario interno di f, o sul bordo (nel qual caso deve trovarsi necessariamente su $x^2+y^2 = 1$, poiché $f(x,y) \leq 4/9 < 1/2$ quando $x^2+y^2 = 3$). Notiamo che

$$\nabla f(x,y) = -[f(x,y)]^2\,(2x-y,\, 4y-x)$$

che si annulla solo in $(0,0)$: quindi non ci sono punti stazionari nell'interno di K'. Rimane da determinare il massimo di f sul vincolo $x^2+y^2 = 1$. Per trovarlo possiamo procedere col metodo dei moltiplicatori di Lagrange e cercarlo tra i punti che soddisfano, per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, il sistema:

$$\begin{aligned} &-[f(x_0,y_0)]^2(2x_0-y_0) = 2\lambda x_0 \\ &-[f(x_0,y_0)]^2(4y_0-x_0) = 2\lambda y_0 \\ &x_0^2+y_0^2 = 1 \end{aligned}$$

Dato che sul vincolo $(x_0,y_0) \neq (0,0)$, né λ, né x_0 né y_0 possono essere $= 0$ (altrimenti dalle prime due equazioni troveremmo $x_0 = y_0 = 0$, in contraddizione con la terza). Quindi, dividendo la prima equazione per la seconda: $y_0(2x_0-y_0) = x_0(4y_0-x_0)$ e combinando quest'equazione con il vincolo troviamo quattro soluzioni:

$$\begin{aligned} x_0^{(1)} &= \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, & y_0^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ x_0^{(2)} &= -\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, & y_0^{(2)} &= -\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ x_0^{(3)} &= \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, & y_0^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ x_0^{(4)} &= -\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, & y_0^{(4)} &= -\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Sostituendo tali valori in $f(x,y)$ si trova:

$$\begin{aligned} f(x^{(1)},y^{(1)}) = f(x^{(2)},y^{(2)}) &= \frac{6+2\sqrt{2}}{7} \\ f(x^{(3)},y^{(3)}) = f(x^{(4)},y^{(4)}) &= \frac{6-2\sqrt{2}}{7} \end{aligned}$$

e quindi il massimo di f su K è $(6+2\sqrt{2})/7$.

Problema 4. Si calcoli:

$$\int_D x\sqrt{|yz|}dxdydz \ , \qquad\qquad D = \{0 \le 4z \le x^2+y^2 \ , \quad x^2+y^2 \le 2y\}.$$

Soluzione. Cambiando variabili, e passando a coordinate cilindriche, troviamo che l'integrale richiesto è

$$\int_E r^{5/2}|\cos\theta|\sin\theta^{1/2}z^{1/2}drd\theta dz \ , \qquad\qquad E = 0 \le z \le r^2/4 \ , \quad 0 \le r \le 2\sin\theta \ .$$

Troviamo quindi:

$$\begin{aligned}\int_D x\sqrt{|yz|}dxdydz &= \int_0^\pi d\theta|\cos\theta|\sqrt{\sin\theta}\int_0^{2\sin\theta} dr\, r^{5/2}\int_0^{r^2/4} dz\,\sqrt{z} = \\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{4^{3/2}}\int_0^\pi d\theta|\cos\theta|\sqrt{\sin\theta}\int_0^{2\sin\theta} dr\, r^{11/2} = \\ &= \frac{1}{12}\frac{2}{13}2^{13/2}\int_0^\pi d\theta|\cos\theta|(\sin\theta)^7 = \\ &= \frac{64\sqrt{2}}{39}\int_0^1 dx x^7 = \frac{8\sqrt{2}}{39}\end{aligned}$$

Problema 5. Si determini una soluzione di

$$\frac{u'}{1-u\sin t} = u\cos t$$

con dato iniziale $u(0) = 1$. Si discuta se tale soluzione è unica, se ne determini un prolungamento massimale e si discuta se tale prolungamento è unico.

Soluzione. Si noti che in un intorno del dato iniziale $(u,t) = (1,0)$ il denominatore al primo membro è diverso da zero, quindi l'equazione è localmente ben definita. Moltiplicando per $(1-u\sin t)$ ad ambo i membri troviamo

$$u' = f(t,u) = u\cos t - u^2\cos t\sin t$$

con f continua in (t,u) e localmente Lipschitziana in u su tutto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Per il teorema di Cauchy la soluzione al problema di Cauchy assegnato esiste ed è localmente unica. Tale soluzione può essere trovata notando che l'equazione è del tipo di Bernoulli. Con la sostituzione $z = u^{-1}$ (valida per $u > 0$) l'equazione si riduce a:

$$z' = -z\cos t + \cos t\sin t$$

il cui integrale generale è $z(t) = ce^{-\sin t} + \sin t - 1$. Imponendo il dato iniziale $z(0) = 1$ troviamo $c = 2$ e $z(t) = 2e^{-\sin t} + \sin t - 1$, da cui

$$u(t) = \frac{1}{2e^{-\sin t} + \sin t - 1}$$

Si noti che il denominatore in tale espressione è sempre $\ge \log 2$, quindi tale espressione è ben definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è un prolungamento massimale (a tutto $\mathbb{R}$) della soluzione all'equazione

$$u' = u\cos t - u^2\cos t\sin t$$

con dato iniziale $u(0) = 1$. Tale equazione è equivalente a quella assegnata se $1 - u(t)\sin t > 0$ ovvero, come si trova dopo uno studio elementare di funzione, per $t \in (-\pi - \arcsin\log 2, \arcsin\log 2)$, che è quindi l'intervallo di esistenza del prolungamento massimale della soluzione all'equazione assegnata. Tale prolungamento massimale è unico poiché $f(t,u)$ è continua e localmente Lipschitziana su tutto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (quindi il prolungamento non può biforcare, altrimenti, al punto di biforcazione, avremmo una contraddizione con il teorema di Cauchy locale).