Soluzioni Primo Esonero - 14/11/2007

Problema 1.

(1) Discutere la convergenza puntuale, uniforme e totale di

$$\sum_{n\geq 1}\left(\sqrt{1+x^n}-1\right)$$

sull'insieme $[-1,+\infty)$.

(2) Calcolare la somma della serie:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{2^{n/2}(n+1)}\ .$$

Soluzione.

(1) Condizione necessaria per la convergenza della serie è che il termine n-esimo tenda a zero per $n\to\infty$, ovvero:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+x^n}=1 \iff \lim_{n\to\infty}x^n=0 \iff |x|<1$$

L'insieme di convergenza puntuale I è quindi contenuto in $(-1,1)$. Per determinare se I coincide o no con tutto l'insieme $(-1,1)$, si noti che il termine n-esimo della serie si può riscrivere nella forma:

$$a_n(x)=\left(\sqrt{1+x^n}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{1+x^n}+1}{\sqrt{1+x^n}+1}=\frac{x^n}{\sqrt{1+x^n}+1}$$

Il denominatore nell'ultima frazione soddisfa la stima $\sqrt{1+x^n}+1\geq 1$ in tutto $(-1,1)$, quindi:

$$|a_n(x)|\leq |x|^n.$$

Visto che $\sum_{n\geq 1}|x|^n$ converge in tutto $(-1,1)$, la stessa conclusione vale per la serie $\sum_{n\geq 1}\left(\sqrt{1+x^n}-1\right)$, e troviamo $I=(-1,1)$. Inoltre avremo convergenza totale (e quindi uniforme) in $[-a,a]$, per ogni $a<1$, poiché la stessa conclusione è valida per $\sum_{n\geq 1}|x|^n$, che stima dall'alto la nostra serie. Rimane da discutere la convergenza uniforme in I. Poiché la serie non converge né in $x=+1$, né in $x=-1$, troviamo che la convergenza non è uniforme né in $[-1,0]$, né in $[0,+1]$. Questo segue da un argomento generale: se una serie $\sum_{k\geq 1}a_k(x)$ (con gli $a_k(x)$ continui in $[a,b]$) converge puntualmente in $[a,b)$ ma non converge in $x=b$, allora la convergenza in $[a,b)$ non è uniforme. Infatti, se per assurdo la convergenza fosse uniforme, allora $\forall\varepsilon>0$, potremmo trovare un $N=N(\varepsilon)$ tale che, $\forall n>N$,

$$\sup_{x\in[a,b)}|s_n(x)-\bar{s}(x)|<\varepsilon\ ,$$

dove $s_n(x)=\sum_{k=1}^n a_k(x)$ e $\bar{s}(x)=\sum_{k\geq 1}a_k(x)$. Di conseguenza sarebbe possibile trovare anche un $M=M(\varepsilon)$ tale che, $\forall m>n>M$,

$$\sup_{x\in[a,b)}|s_n(x)-s_m(x)|<\varepsilon$$

(basta scegliere $M(\varepsilon)=N(\varepsilon/2)$ e, per ogni $m>n>M$, usare che $|s_n(x)-s_m(x)|=|(s_n(x)-\bar{s}(x))+(\bar{s}(x)-s_m(x))|\leq|s_n(x)-\bar{s}(x)|+|\bar{s}(x)-s_m(x)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2$). D'altra parte, se $m>n$,

$$s_m(x)-s_n(x)=\sum_{k=n+1}^{m}a_k(x)$$

è una funzione continua su $[a,b]$, poiché è una somma finita di funzioni continue su $[a,b]$. Questo implica che

$$|s_n(b) - s_m(b)| \le \sup_{x\in[a,b)} |s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$$

ovvero che $s_n(b)$ è una successione di Cauchy, quindi convergente, contro l'ipotesi che la serie diverge in $x = b$.

(2) Per calcolare la somma data, poniamo $x = -2^{-1/2}$ e riscriviamo

$$\sum_{n\ge1} \frac{(-1)^n}{2^{n/2}(n+1)} = \sum_{n\ge1} \frac{x^n}{(n+1)} = \frac{1}{x}\sum_{n\ge1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)} = \frac{1}{x}\sum_{n\ge1} \int_0^x t^n dt\ .$$

Si noti ora che il punto x è all'interno del raggio di convergenza della serie $\sum_{n\ge1} \frac{x^n}{n+1}$ (che è uguale a 1). Poiché in ogni intervallo chiuso contenuto in $(-1,1)$ la convergenza della serie è totale, possiamo scambiare integrale e serie nell'ultima espressione e ottenere che la somma della serie è uguale a

$$\frac{1}{x}\int_0^x \Big[\sum_{n\ge1} t^n\Big] dt = \frac{1}{x}\int_0^x \Big[\frac{1}{1-t} - 1\Big] dt = \frac{1}{x}\Big[-\log(1-x) - x\Big] = -\frac{1}{x}\log(1-x) - 1.$$

Sostituendo $x = -1/\sqrt{2}$ troviamo finalmente

$$\sum_{n\ge1} \frac{(-1)^n}{2^{n/2}(n+1)} = \sqrt{2}\log\big(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\big) - 1$$

Problema 2.

Determinare e localizzare massimo e minimo assoluti di $f(x,y,z) = xyz$ sull'insieme:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x \ge 0\,,\ y \ge 0\,,\ z \ge 0\,,\ x + y + z = 1\}.$$

Soluzione.

Prima di tutto, si noti che E è compatto ed f è continua su E: quindi f assume massimo e minimo su E. Per determinare il minimo, si osservi che $f \ge 0$ su E, e $f = 0$ solo se $x = 0$ o $y = 0$ o $z = 0$. Quindi il minimo di f su E è uguale a 0, e tale valore è assunto sull'insieme

$$M = \{x = 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ y+z = 1\} \cup \{y = 0,\ x \ge 0,\ z \ge 0,\ x+z = 1\} \cup \{z = 0,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y = 1\}\ .$$

Per determinare il massimo notiamo che sull'insieme considerato $z = 1 - x - y$. Quindi il massimo di f su E coincide con il massimo della funzione

$$g(x,y) \overset{def}{=} f(x,y,1-x-y) = xy(1-x-y) = xy - x^2y - xy^2$$

sull'insieme

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \ge 0\,,\ y \ge 0\,,\ 1 - x - y \ge 0\}\ ,$$

che è il triangolo chiuso sul piano xy di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. I punti del bordo di F sono la proiezione sul piano xy dei punti di M, su cui la funzione f si annulla. Il massimo di g è quindi necessariamente assunto sull'interno di F, e in particolare su un punto stazionario dell'interno di F. Cerchiamo allora i punti stazionari di g sull'interno di F. Imponiamo:

$$\underline{\partial}\, g = \big(y - 2xy - y^2,\ x - 2xy - x^2\big) = \underline{0}\ \Rightarrow\ \begin{cases} y(1-2x-y) = 0 \\ x(1-2y-x) = 0 \end{cases}.$$

Nei punti dell'interno di F si ha $x, y \neq 0$. Quindi le ultime due condizioni implicano (dividendo la prima equazione per y e la seconda per x):

$$\begin{cases} 1-2x-y=0 \\ 1-2y-x=0 \end{cases} \Rightarrow \; 1-2(1-2x)-x=0 \; \Leftrightarrow \; -1+3x=0 \; ,$$

che implica $x = 1/3$, e quindi $y = 1-2x = 1/3$. In conclusione, c'è un solo punto stazionario di g sull'interno di F che, per quanto detto sopra, è necessariamente il massimo di g su F:

$$\max_F g(x,y) = \max_E f(x,y,z) = g(1/3,1/3) = f(1/3,1/3,1/3) = 1/27,$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo usato che, su E, il punto $(x,y) = (1/3,1/3)$ corrisponde a un valore di z uguale a $z = 1-x-y = 1/3$.

Problema 3.
Calcolare

$$\int_E xe^{2y} dxdy \; ,$$

dove

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x \geq 0 \, , \; x^2+y^2 \leq 1 \, , \; y^2 \leq 3x^2\}.$$

Soluzione.
Riscriviamo l'insieme E in coordinate polari. Si noti in particolare che la terza condizione che definisce E si riscrive come $(\tan\theta)^2 \leq 3$ (dove abbiamo usato che $y/x = \tan\theta$), ovvero $|\tan\theta| \leq \sqrt{3}$. Dato che l'insieme E è contenuto nel semipiano $x \geq 0$, la condizione $|\tan\theta| \leq \sqrt{3}$ equivale a $|\theta| \leq \arctan\sqrt{3} = \pi/3$. In conclusione, l'insieme E in coordinate polari si riscrive nella forma:

$$F = \{r \leq 1, \; -\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3\}.$$

L'integrale dato si riscrive allora come:

$$\int_E xe^{2y} dxdy = \int_F \rho\cos\theta e^{2\rho\sin\theta} \rho d\rho d\theta = \int_0^1 d\rho \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \rho^2 \cos\theta e^{2\rho\sin\theta} d\theta$$

Nell'ultima espressione, l'integrale su θ ci dà:

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \rho^2 \cos\theta e^{2\rho\sin\theta} d\theta = \frac{1}{2}\rho e^{2\rho\sin\theta}\Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} = \frac{1}{2}\rho e^{\sqrt{3}\rho} - \frac{1}{2}\rho e^{-\sqrt{3}\rho} = \rho\sinh(\sqrt{3}\rho).$$

Sostituendo tale risultato nell'equazione precedente troviamo:

$$\int_E xe^{2y} dxdy = \int_0^1 \rho\sinh(\sqrt{3}\rho) d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \rho\sinh\rho \; d\rho = \frac{1}{3}\Big[\rho\cosh\rho - \sinh\rho\Big]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\Big[\sqrt{3}\cosh\sqrt{3} - \sinh\sqrt{3}\Big].$$

Problema 4.
Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità di

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\tan(xy)}{x^2 y} & \text{se} \quad xy \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad xy = 0 \end{cases}$$

Soluzione.
Se $xy \neq 0$ e $xy \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, f è una funzione C^∞, quindi in particolare continua, derivabile e differenziabile. Sull'insieme $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, la tangente che appare nella definizione di f diverge (mentre il denominatore rimane finito e non nullo), quindi f non è definita su G (in particolare f non è né continua, né derivabile, né differenziabile su G).

Rimane da studiare continuità, derivabilità e differenziabilità sulla regione $xy = 0$. Si noti che, per $xy \to 0$, la tangente può essere riscritta nella forma:

$$\tan(xy) = xy + O(x^3y^3) \ ,$$

dove abbiamo usato lo sviluppo di Taylor della tangente fino al second'ordine incluso (abbiamo usato che i coefficienti di Taylor al second'ordine in $xy = 0$ sono tutti nulli). Nell'equazione precedente, $O(x^3y^3)$ è un resto che, se diviso per x^3y^3, tende a costante nel limite $xy \to 0$. Sostituendo tale sviluppo nella definizione di f, troviamo che, se $xy \to 0$ (con $xy \neq 0$),

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2y}\big[xy + O(x^3y^3)\big] = \frac{1}{x} + O(xy^2) \ .$$

Da tale espressione è evidente che, se $(x, y) \to (x_0, y_0)$ con $x_0y_0 = 0$, $f(x, y) \to \frac{1}{x_0}$. Quindi il limite di f è uguale a 1 solo se $x_0 = 1$, ovvero solo nel punto $(1, 0)$. Quindi, in conclusione, sulla regione $xy = 0$, f è continua solo nel punto $(1, 0)$.

Per quanto riguarda la derivabilità, su tutti i punti della forma $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$, si ha:

$$\lim_{h\to 0} \left|\frac{f(h, y_0) - 1}{h}\right| = \lim_{h\to 0} \left|\frac{1/h + O(hy_0^2) - 1}{h}\right| = +\infty \ ,$$

quindi la derivata ∂_1 non esiste ed f non è derivabile in tali punti. Analogamente, nei punti della forma $(x_0, 0)$, $x_0 \neq 0, 1$, si ha:

$$\lim_{h\to 0} \left|\frac{f(x_0, h) - 1}{h}\right| = \lim_{h\to 0} \left|\frac{1/x_0 - 1 + O(x_0h^2)}{h}\right| = +\infty \ ,$$

quindi la derivata ∂_2 non esiste ed f non è derivabile in tali punti. In $(0, 0)$ la funzione è derivabile, con gradiente nullo, poiché

$$\frac{f(0, h) - 1}{h} = \frac{f(h, 0) - 1}{h} = 0$$

Infine, in $(1, 0)$, la derivata ∂_1 sicuramente esiste, ed è nulla, poiché $\frac{f(x_0+h,0)-1}{h} = 0$. Per quanto riguarda la derivata parziale lungo y, abbiamo:

$$\partial_2 f(1, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1, h) - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{O(h^2)}{h} = 0$$

dove abbiamo usato che, come dimostrato sopra, $f(1, h) = 1 + O(h^2)$. Quindi, in conclusione, f è derivabile in $(1, 0)$ e ivi ha gradiente nullo.

Per quanto riguarda la differenziabilità, l'unico punto su $xy = 0$ dove possiamo sperare che f sia differenziabile è $(1, 0)$, che è l'unico punto di tale insieme su cui f è continua. D'altronde, f è differenziabile in $(1, 0)$ se e solo se

$$\lim_{\underline{h}\to \underline{0}} \frac{f(1 + h_1, h_2) - 1}{|\underline{h}|} = 0.$$

Usando ancora lo sviluppo di Taylor discusso sopra, abbiamo:

$$f(1+h_1,h_2)-1=\frac{1}{1+h_1}-1+O(h_2^2)=-h_1+O(|\underline{h}|^2).$$

Dividendo per $|\underline{h}|$ troviamo

$$\frac{f(1+h_1,h_2)-1}{|\underline{h}|}=-\frac{h_1}{|\underline{h}|}+O(|\underline{h}|)\ ,$$

che non tende a zero (poiché il primo termine non ammette limite, per $\underline{h}\to\underline{0}$, mentre il secondo tende a zero). Quindi f non è differenziabile in $(1,0)$.

Problema 5. *(Facoltativo)*
Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{\big(\sin nx\big)^2}{2^n}$$

e calcolare $\int_0^\pi f^2(x)dx$ usando l'identità di Parseval.

Soluzione.
Calcoliamo i coefficienti di Fourier di f. Poiché f è pari, tutti i b_k sono nulli. Per calcolare i coefficienti a_k, notiamo prima di tutto che la serie che definisce f è totalmente convergente su tutto $\mathbb{R}$, quindi nel calcolo degli integrali possiamo scambiare serie e integrali. Iniziamo da a_0:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n\geq 1}2^{-n}\big(\sin nx\big)^2\,dx=\frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}2^{-n}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\sin nx\big)^2\,dx=\frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}2^{-n}\frac{2\pi}{2}=\frac{1}{2}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato che la media di $\big(\sin nx\big)^2$ è $1/2$. Se ora $k\geq 1$, troviamo:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}2^{-n}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\sin nx\big)^2\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}2^{-n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}\cos kx\,dx=$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\sum_{n\geq 1}2^{-n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2nx\cos kx\,dx\ ,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che l'integrale di $\cos kx$ su $[-\pi,\pi]$ è uguale a zero. Riscrivendo il prodotto $\cos 2nx\cos kx$ nella forma $\big[\cos(2nx+kx)+\cos(2nx-kx)\big]/2$, troviamo:

$$a_k=-\frac{1}{4\pi}\sum_{n\geq 1}2^{-n}\int_{-\pi}^{\pi}\big[\cos(2n+k)x+\cos(2n-k)x\big]\,dx=-\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}2^{-n}\delta_{2n,k}\ ,$$

dove abbiamo usato che l'integrale di $\cos(2n+k)x$ su $[-\pi,\pi]$ è zero, mentre quello di $\cos(2n-k)x$ è uguale a $2\pi\delta_{2n,k}$ (ovvero: se $2n\neq k$ è uguale zero, mentre se $2n=k$ è uguale a 2π). Ora, se k è dispari, $\delta_{2n,k}=0$, $\forall n\geq 1$, e quindi $a_k=0$. Se k è pari, la somma $\sum_{n\geq 1}2^{-n}\delta_{2n,k}$ dà banalmente $2^{-k/2}$. In conclusione: se $k=0$, $a_0=1/2$, mentre, se $k\geq 1$,

$$a_k=\begin{cases}0 & \text{se } k \text{ è dispari}\ ,\\ -2^{-1-k/2} & \text{se } k \text{ è pari}\ .\end{cases}$$

Usando la formula di Parseval troviamo:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k\geq 1}a_k^2=\frac{1}{8}+\sum_{k\geq 1}^{k\ \text{pari}}2^{-2-k}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\sum_{h\geq 1}2^{-2h}=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{5}{24}$$

e quindi

$$\int_0^\pi f^2(x)\,dx=\frac{5\pi}{48}\ .$$