Soluzioni secondo appello

Problema 1. Discutere la convergenza puntuale, uniforme e totale di

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n^{3/4}(1+nx^2)}.$$

Soluzione. Innanzitutto, si osservi che per $x = 0$ la serie converge banalmente, mentre per $x \neq 0$ il termine n-esimo della serie, in modulo, può essere stimato dall'alto con $|x|^{-1}n^{-7/4}$, che è sommabile. Quindi la serie converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$. Per studiare la convergenza totale, è necessario calcolare (o almeno stimare)

$$\sup_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{n^{3/4}(1+nx^2)}.$$

Uno studio elementare della funzione $f(x) = x/[n^{3/4}(1+nx^2)]$ per $x \geq 0$ mostra che $f(x)$ assume il massimo in $x = 1/\sqrt{n}$. In tale punto la funzione assume il valore $f(1/\sqrt{n}) = 1/(2n^{5/4})$, che è sommabile: di conseguenza la serie assegnata converge totalmente (e quindi anche uniformemente) su tutto $\mathbb{R}$.

Problema 2. Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità di

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\cos\left(\frac{1}{xy}\right) & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

su $\mathbb{R}^2$. Si stabilisca se f è di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$.

Soluzione. $f(x,y)$ è derivabile infinite volte sulla regione $xy \neq 0$, ed è quindi continua, derivabile, differenziabile e di classe C^1 su tale regione. Dobbiamo quindi discutere continuità, derivabilità e differenziabilità di f nei punti del tipo $(x_0, 0)$ o $(0, y_0)$. Poiché f è simmetrica nello scambio di x e y è sufficiente considerare punti della forma $(x_0, 0)$, con $x_0 \in \mathbb{R}$.
(i) Continuità in $(x_0, 0)$. Si noti che $|f(x,y)| \leq x^2y^2$. Dato che, ovviamente, $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} x^2y^2 = 0$, si ha che f è continua in tutti i punti del tipo $(x_0, 0)$ (e quindi, per simmetria, anche nei punti del tipo $(0, y_0)$).
(ii) Derivabilità in $(x_0, 0)$. Vogliamo controllare se esistono i limiti dei seguenti rapporti incrementali:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, 0)}{h}, \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, h)}{h}.$$

Il primo rapporto è identicamente uguale a 0, quindi $\partial_x f(x_0, 0) = 0$. Il secondo rapporto è uguale a $x_0^2 h\cos(1/x_0h)$, che tende a 0 per $h \to 0$, quindi $\partial_y f(x_0, 0) = 0$. Analogamente si trova $\nabla f(0, y_0) = (0, 0)$.
(iii) Differenziabilità in $(x_0, 0)$. Vogliamo verificare se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Il rapporto al primo membro, in modulo, è

$$\frac{|f(x_0+h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{(x_0+h)^2k^2\left|\cos\left(\frac{1}{(x_0+h)k}\right)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq (x_0+h)^2 k$$

e quindi tende a 0 nel limite $h, k \to 0$. Quindi f è differenziabile in tutti i punti del tipo $(x_0, 0)$ (e quindi, per simmetria, anche nei punti del tipo $(0, y_0)$).

Infine, per stabilire se f è C^1 su tutto $\mathbb{R}$, vogliamo controllare se le derivate prime sono continue su $xy = 0$, ovvero se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \nabla f(x,y) = \nabla f(x_0,0) = (0,0)$$

Si noti che $\partial_y f(x,y) = 2x^2 y\cos(1/xy) + x\sin(1/xy)$, e tale funzione ammette limite (uguale a 0) solo se $x_0 = 0$. Quindi la funzione è C^1 in $(0,0)$, ma non in $(x_0,0)$, $x_0 \neq 0$ (e non in $(0,y_0)$, $y_0 \neq 0$).

Problema 3. Si calcoli l'area della superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \quad z = \arctan(y/x), \quad 0 < x^2+y^2 \leq 1, \quad |y| \leq x\}.$$

Soluzione. La superficie Σ ammette una parametrizzazione naturale in termini di coordinate cilindriche $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Le condizioni $0 < x^2+y^2 \leq 1$ e $|y| \leq x$ diventano: $0 < r \leq 1$ e $|\theta| \leq \pi/4$, mentre il vincolo $z = \arctan(y/x)$ diventa banalmente $z = \theta$. Quindi Σ è descritta in termini di queste coordinate dalla funzione

$$\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ \theta \end{pmatrix}, \qquad 0 < r \leq 1\,, \qquad -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4.$$

Si ha:

$$\varphi_r(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_\theta(r,\theta) = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

e $|\varphi_r \times \varphi_\theta| = \sqrt{1+r^2}$. Quindi:

$$\text{Area}(\Sigma) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_0^1 dr\sqrt{1+r^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\log(1+\sqrt{2}).$$

Problema 4. Sia

$$\omega = \frac{y^2}{x^2+y^4}dx - \frac{2xy}{x^2+y^4}dy.$$

(1) Si stabilisca se ω è una forma esatta sul suo dominio di definizione e, in caso affermativo, se ne determini una primitiva.

(2) Si calcoli $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma(t) = (\sin t,\ 4 + 3\cos^2 t)$, $\ t \in [0,\pi]$.

Soluzione.
(1) Si noti che il dominio di definizione di ω è $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, che non è semplicemente connesso. Iniziamo a controllare se ω è chiusa su D. Si trova:

$$\partial_y \frac{y^2}{x^2+y^4} = \partial_x - \frac{2xy}{x^2+y^4} = \frac{2x^2y - 2y^5}{(x^2+y^4)^2}$$

quindi ω è chiusa. Per controllare se è esatta proviamo a cercare una primitiva $f(x,y)$ tale che:

$$\partial_x f(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^4}\,, \qquad \partial_y f(x,y) = -\frac{2xy}{x^2+y^4}$$

Integrando troviamo che, per $y \neq 0$, $f(x,y) = \arctan(x/y^2)$. Se $y = 0$, $f(x,0) = \pi/2$ per $x > 0$ e $f(x,0) = -\pi/2$ per $x < 0$. Quindi ω è esatta su D.

(2) La curva assegnata è chiusa. Poiché ω è esatta si ha $\int_\gamma \omega = 0$.

Problema 5. Si determini la soluzione al problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'' + u = (1+\cos^2 t)^{-1} \\ \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 1 \end{cases}$$

e si discuta se tale soluzione ammette un prolungamento massimale a tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che, poiché l'equazione assegnata è lineare a coefficienti costanti, con termine non omogeneo continuo su tutto $\mathbb{R}$, sappiamo a priori che esiste una soluzione unica globale prolungabile a tutto $\mathbb{R}$. Per determinare tale soluzione iniziamo a studiare l'equazione omogenea associata: $u'' + u = 0$. Il polinomio caratteristico di tale equazione è $\lambda^2 + \lambda = 0$, con radici $\lambda = \pm 1$. Quindi l'integrale generale dell'omogenea è $c_1 \cos t + c_2 \sin t$. Per determinare l'integrale generale della non omogenea usiamo il metodo di variazione delle costanti. Cerchiamo la soluzione nella forma $u(t) = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t$, con

$$c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t = 0\ , \qquad -c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t = \frac{1}{1+\cos^2 t}$$

da cui:

$$c_1'(t) = -\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\ , \qquad c_2'(t) = \frac{\cos t}{1+\cos^2 t}$$

Integrando troviamo:

$$c_1(t) = \arctan(\cos t) + \kappa_1\ , \qquad c_2(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2}+\sin t}{\sqrt{2}-\sin t} + \kappa_2.$$

L'integrale generale dell'equazione assegnata è quindi:

$$u(t) = \kappa_1 \cos t + \kappa_2 \sin t + \cos t \arctan(\cos t) + \frac{\sin t}{2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2}+\sin t}{\sqrt{2}-\sin t}.$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo: $\kappa_1 = -\pi/4$, $\kappa_2 = 0$, quindi la soluzione del problema assegnato è:

$$u(t) = -\frac{\pi}{4}\cos t + \cos t \arctan(\cos t) + \frac{\sin t}{2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2}+\sin t}{\sqrt{2}-\sin t}.$$