Soluzioni Secondo Esonero - 24/1/2008

Problema 1. Sia

$$\omega = \frac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2}dx + \frac{2x^2y}{(1+x^2y^2)^2}dy$$

(i) Dire se ω è esatta sul suo insieme di definizione, e in caso affermativo trovare una primitiva.
(ii) Si calcoli $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin 2t)$, $t \in [0, \pi/4]$.

Soluzione.
(i) Per stabilire se $\omega = a_x dx + a_y dy$ è esatta, innanzitutto controlliamo se ω è chiusa sul suo insieme di definizione, $\mathbb{R}^2$. Si trova:

$$\partial_x a_y = \partial_y a_x = \frac{4xy(1-x^2y^2)}{(1+x^2y^2)^3}$$

quindi ω è chiusa. Poiché ω è di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}^2$, che è un insieme semplicemente connesso, ω è esatta. Esiste quindi $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tale che:

$$\partial_x f(x,y) = \frac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2}\ , \qquad \partial_y f(x,y) = \frac{2x^2y}{(1+x^2y^2)^2}$$

Le due equazioni si integrano facilmente e si trova:

$$\omega = df\ , \qquad f(x,y) = -\frac{1}{1+x^2y^2}$$

(ii) È facile verificare che la curva assegnata è regolare. Si trova quindi:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega = \int_\gamma df &= f(\gamma(\pi/4)) - f(\gamma(0)) = \\ &= -\frac{1}{1+\gamma_1(\pi/4)^2\gamma_2(\pi/4)^2} + \frac{1}{1+\gamma_1(0)^2\gamma_2(0)^2} = \\ &= -\frac{1}{1+e^\pi/2} + 1\end{aligned}$$

Problema 2. Sia γ la curva in $\mathbb{R}^2$ definita in coordinate polari da

$$\rho(\theta) = 1 + \cos\theta\ , \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

(i) Si calcoli la lunghezza di γ.
(ii) Si calcoli l'area della regione piana racchiusa da γ e contenuta nel primo quadrante.

Soluzione.
(i) Una parametrizzazione naturale della curva assegnata è la seguente:

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \rho(\theta)\cos\theta \\ \rho(\theta)\sin\theta \end{pmatrix}\ , \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Si ha quindi:

$$\gamma'(\theta) = \begin{pmatrix} \rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta \\ \rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta \end{pmatrix}$$

cosicché $|\gamma'(\theta)| = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = 2|\cos(\theta/2)|$. $|\gamma'|$ si annulla solamente in $\theta = \pi$, quindi γ è una curva regolare a tratti. La lunghezza si calcola come segue:

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} d\theta\ 2|\cos(\theta/2)| = 4\int_0^{\pi} d\theta\ \cos(\theta/2) = 8$$

(ii) La regione piana assegnata (chiamiamola Ω) è la regione racchiusa dalla curva (regolare a tratti) $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, dove: γ_1 è la restrizione di γ al primo quadrante, γ_2 è il segmento verticale da $(0,1)$ a $(0,0)$ e γ_3 è il segmento orizzontale da $(0,0)$ a $(2,0)$. Per il teorema di Gauss-Green si ha che l'area $m(\Omega)$ di tale regione si può calcolare come segue:

$$m(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} (-ydx + xdy) = \frac{1}{2}\int_{\gamma_1} (-ydx + xdy)$$

dove nella seconda identità abbiamo usato che l'integrale di $(-ydx + xdy)$ lungo i segmenti γ_2 e γ_3 è nullo. Abbiamo quindi:

$$m(\Omega) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta\,\big[-\gamma_2(\theta)\gamma_1'(\theta) + \gamma_1(\theta)\gamma_2'(\theta)\big] = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta\,\rho^2(\theta) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta\,(1+\cos\theta)^2 = 1 + \frac{3\pi}{8}$$

Problema 3. Si calcoli l'area della superficie Σ definita da:

$$\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 :\ |x_1| \le 1\,,\ \sqrt{x_2^2 + x_3^2} = 1 + \sqrt{1 - x_1^2}\}$$

Soluzione.
Una parametrizzazione naturale di Σ è:

$$\varphi(x_1, \theta) = \begin{pmatrix} x_1 \\ (1 + \sqrt{1 - x_1^2})\cos\theta \\ (1 + \sqrt{1 - x_1^2})\sin\theta \end{pmatrix}$$

con $x_1 \in [-1, 1]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Si ha:

$$\partial_{x_1}\varphi(x_1, \theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-x_1}{\sqrt{1-x_1^2}}\cos\theta \\ \frac{-x_1}{\sqrt{1-x_1^2}}\sin\theta \end{pmatrix}$$

e

$$\partial_\theta\varphi(x_1, \theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(1 + \sqrt{1 - x_1^2})\sin\theta \\ (1 + \sqrt{1 - x_1^2})\cos\theta \end{pmatrix}$$

da cui:

$$|\partial_{x_1}\varphi(x_1, \theta) \times \partial_\theta\varphi(x_1, \theta)| = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2}}$$

Quindi, l'area di Σ è uguale a:

$$2\pi\int_{-1}^{1} dx_1\big(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2}}\big) = 4\pi + 2\pi^2$$

Problema 4. Si calcoli l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$u^{(5)} - 2u^{(4)} + u^{(3)} - u'' + 2u' - u = e^t \ .$$

Soluzione.
Il polinomio caratteristico associato al problema omogeneo è:

$$P(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 1 = (\lambda^3 - 1)(\lambda - 1)^2 = (\lambda - 1)^3(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

Le radici di $P(\lambda)$ sono quindi: 1 (con molteplicità 3) e $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$ (entrambe con molteplicità 1). L'integrale generale dell'omogenea è allora:

$$u = e^t(c_1 + c_2 t + c_3 t^2) + e^{-t/2}(c_4 \cos(\sqrt{3}t/2) + c_5 \sin(\sqrt{3}t/2))$$

Per calcolare l'integrale generale dell'equazione assegnata ci rimane da calcolare un integrale particolare della non omogenea, da cercarsi, ad es., con il metodo di somiglianza. Poichè il termine noto è un esponenziale associato a una radice del polinomio caratteristico con molteplicità 3, la soluzione particolare può essere cercata nella forma $u_* = at^3 e^t$. Derivando 5 volte troviamo:

$$\begin{aligned}
u_*' &= ae^t\big(t^3 + 3t^2\big)\\
u_*'' &= ae^t\big(t^3 + 6t^2 + 6t\big)\\
u_*^{(3)} &= ae^t\big(t^3 + 9t^2 + 18t + 6\big)\\
u_*^{(4)} &= ae^t\big(t^3 + 12t^2 + 36t + 24\big)\\
u_*^{(5)} &= ae^t\big(t^3 + 15t^2 + 60t + 60\big)
\end{aligned}$$

da cui:

$$u_*^{(5)} - 2u_*^{(4)} + u_*^{(3)} - u_*'' + 2u_*' - u_* = 18ae^t$$

e quindi $a = 1/18$. In conclusione l'integrale generale dell'equazione assegnata è

$$u = e^t(c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \frac{t^3}{18}) + e^{-t/2}(c_4 \cos(\sqrt{3}t/2) + c_5 \sin(\sqrt{3}t/2))$$

Problema 5. Si trovino due soluzioni $C^1(\mathbb{R})$ di

$$u' = 2\sqrt{u}\,\cos t\ , \qquad u(2\pi) = 0\ .$$

Quante altre soluzioni $C^1(\mathbb{R})$ esistono di tale equazione differenziale?

Soluzione.
Innanzitutto osserviamo che il membro di destra dell'equazione non è Lipschitziano in u sul suo insieme di definizione, $t \in \mathbb{R}$, $u \geq 0$. È quindi possibile che esistano effettivamente piú soluzioni corrispondente allo stesso dato iniziale.

Si vede subito che $u(t) = 0$ è una soluzione globale possibile. Per trovarne un'altra proviamo a procedere col metodo di separazione di variabili, assumendo che, in un intorno sinistro o destro di 2π, $u > 0$. Si ha allora:

$$\frac{u'}{2\sqrt{u}} = \cos t$$

da cui, integrando ambo i membri, si ottiene:

$$\sqrt{u(t)} = \sin t$$

Poiché $u(t) > 0$, deve essere, ad es., $t \in [2\pi, 3\pi]$. Quindi una seconda soluzione ammissibile dell'equazione assegnata è:

$$u = \begin{cases} \sin^2 t \ , & t \in [2\pi, 3\pi] \\ 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre, dato un'insieme (finito o infinito) di numeri interi $I = \{k_1, k_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$, si vede subito che anche la funzione

$$u = \begin{cases} \sin^2 t \ , & t \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \ , \quad k \in I \\ 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

è soluzione globale dell'equazione data. Esistono quindi infinite soluzioni (una per ogni scelta di I).