

# Corso di Matematica per Geologia - Modulo 1, AA 2021/2022

Prova scritta, 12/07/2022

<b>Cognome e Nome</b>	
<b>Numero di matricola</b>	

1. Si considerino il vettore  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  e la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ :

- a) calcolare la traccia ed il determinante di  $A$ ;
- b) stabilire se  $A$  è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinare la matrice inversa;
- c) determinare il vettore  $\vec{v} = A\vec{u}$ ;
- d) calcolare il prodotto scalare  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  e verificare la disuguaglianza  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$ ;
- e) calcolare il prodotto vettoriale  $\vec{u} \times \vec{v}$  ed esibire un vettore perpendicolare sia ad  $\vec{u}$  che a  $\vec{v}$ ;
- f) determinare l'angolo compreso tra i vettori  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ;
- g) verificare che  $\vec{w} = (0, -3, 0)$  è un autovettore di  $A$  e determinare l'autovalore associato.

2. Calcolare i seguenti limiti (motivando la risposta):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^3 - 13x^3}{(2 - 2e^x)^3}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sin x)^3 - 13x^3}{(2 - 2e^x)^3}.$$

3. Studiare il grafico della funzione (ln è il logaritmo naturale)

$$f(x) = \frac{2 \ln |x|}{x^2}.$$

In particolare:

- a) determinare il dominio di definizione (discutendo eventuali simmetrie) e il segno della funzione;
- b) studiare l'esistenza di asintoti;
- c) determinare gli intervalli di monotonia ed individuare eventuali punti di massimo o minimo;
- d) studiare la concavità.
- e) **[Facoltativo:** determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto  $x = 1$ ].

4. Si consideri la funzione

$$F(x, y) = x e^{x-y} - y.$$

- a) Stabilire se la derivata direzionale di  $F$  lungo  $\vec{v} = (1, 2)$  nel punto  $(x, y) = (0, -1)$  è positiva o negativa;
- b) Stabilire se il punto  $(x, y) = (-1, -1)$  è un punto di massimo, di minimo, di sella, oppure nessuno dei precedenti.

5. Si calcoli il seguente integrale doppio:

$$\iint_T e^{x^2-4x} dx dy$$

dove  $T$  è il triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(2, 2)$ .

6. Si consideri il campo di forze:  $\vec{F} = \vec{F}(x, y) = (x^2y, e^{xy}x)$  con  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Si calcoli il lavoro di  $\vec{F}$  lungo la curva  $y = x^p$  dal punto  $(0, 0)$  al punto  $(1, 1)$  al variare del parametro  $p > 0$ .

7. Si risolva il seguente problema di Cauchy per la funzione incognita  $x = x(t)$ :

$$\begin{cases} x' = \frac{e^{-x^2}-1}{x} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Si calcoli, in particolare, il limite della soluzione  $x(t)$  per  $t \rightarrow \pm\infty$ .

8. Si determini l'integrale generale della seguente equazione differenziale del second'ordine per la funzione incognita  $x = x(t)$ :

$$x'' + 2x' + 5x = \sin t$$