Esercizi - undicesima settimana (9-13 maggio 2022)
Corso di Matematica II per Geologia

1. Risolvere l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

per $u = u(x,t)$ con $x, t \in \mathbb{R}$ in corrispondenza dei dati iniziali $u(x,0) = f(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, dove

$$f(x) := \begin{cases} (1+\cos x)^2 & \text{per } -\pi \le x \le \pi \\ 0 & \text{per } x \le -\pi \text{ e } x \ge \pi \end{cases}$$

Si illustri il comportamento della soluzione facendo un grafico di $y = u(x, t_0)$ sul piano cartesiano xy agli istanti di tempo $t_0 = \pi/2, \pi, 2\pi$.

2. Ripetere l'esercizio precedente nel caso in cui il dato iniziale per u sia: $u(x,0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, con

$$g(x) := \begin{cases} (\sin x)^3 & \text{per } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{per } x \le -1 \text{ e } x \ge 1 \end{cases}$$

3. Risolvere la seguente equazione delle onde sul segmento $[0,3]$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 6\sin(\frac{\pi x}{3}) + 12\sin(\frac{2\pi x}{3}) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 4\sin(\frac{2\pi x}{3}) - 7\sin(\frac{5\pi x}{3}) \\ u(0,t) = u(3,t) = 0 \end{cases}$$

4. Risolvere la seguente equazione delle onde sul segmento $[0,\pi]$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = \sqrt{7}\sin(3x) - 5\sin(4x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 5\sin x + 13\sin(4x) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

5. Risolvere la seguente equazione delle onde sul segmento $[0,\pi]$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 6\sin(2x) - 5\sin(7x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin x + 5\sin(3x) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

6. Risolvere la seguente equazione delle onde sul segmento $[0,\pi]$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$