

Esercizi - quinta settimana (21-25 marzo 2022)

Corso di Matematica II per Geologia

1. Si calcolino i seguenti integrali doppi:

$$\begin{aligned} \iint_T (2x - y)(1 - 2x - y) dx dy, & \quad T = \{\text{triangolo di vertici } (0, 0), (1, 0), (1/2, 1)\} \\ \iint_A \frac{x}{y} dx dy, & \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x^2, x \leq y \leq 2x\} \\ \iint_I x^2 y^2 dx dy, & \end{aligned}$$

dove nell'ultima riga I è l'insieme contenuto nel primo quadrante del piano x, y , delimitato dalle rette di equazione $y = 2x, y = x/2$ e dalle iperboli di equazione $xy = 2, xy = 4$.

2. Si calcolino i momenti di inerzia rispetto agli assi x, y, z di un cilindro retto di base circolare di raggio R , altezza H , centrato nell'origine e con asse principale lungo l'asse z . In altre parole si calcolino i seguenti due integrali tripli:

$$I_z = \iiint_C (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad I_x = I_y = \frac{1}{V} \iiint_C (y^2 + z^2) dx dy dz,$$

dove V è il volume del cilindro C di equazione $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2, |z| \leq H/2\}$.

3. Calcolare il volume del solido S di \mathbb{R}^3 di equazione $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z(1 + x^2 + y^2) \leq xy\}$.

4. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_A (x^2 + y^2 + z^2)^7 dx dy dz$$

dove $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

5. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_C (x^2 + y^2)^{1/3} dx dy dz$$

dove C è il cono di vertice nel punto $(0, 0, -2)$, avente per base il cerchio di centro l'origine e raggio 1 contenuto nel piano xy .