Esercizi - sesta settimana (28 marzo - 1 aprile 2022)
Corso di Matematica II per Geologia

1. Si calcoli il seguente integrale doppio:

$$\iint_A xy \, dx \, dy,$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1\}$.

2. Si calcoli il seguente integrale triplo:

$$\iiint_S \frac{y^2}{x^2} \, dx \, dy \, dz,$$

dove S è la sfera di raggio 1 centrata in $(1, 0, 0)$.

3. Si consideri il campo di forze $\vec{F}(x, y) = (x^2, xy)$. Si calcoli il lavoro

$$\int_{\mathcal{C}: A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

lungo il cammino $\mathcal{C}$ che consiste della porzione di parabola di equazione $x = y^2$ che va dal punto $A = (0, 0)$ al punto $B = (1, 1)$.

4. Si consideri la funzione scalare in due variabili $H(x, y) = x^2 e^{xy}$.

- Se ne calcoli il gradiente $\vec{\nabla} H(x, y)$
- Si calcoli l'integrale del gradiente

$$\int_{\mathcal{C}: A \rightarrow B} \vec{\nabla} H \cdot d\vec{s}$$

lungo il cammino $\mathcal{C}$ che consiste della porzione di iperbole di equazione $y = 1/x$ che va dal punto $A = (1, 1)$ al punto $B = (2, 1/2)$ con due metodi differenti:

- con il calcolo diretto;
- usando il teorema per cui l'integrale di ∇H lungo un cammino da A a B è uguale alla differenza di H calcolata tra gli estremi;

e si verifichi che i due risultati sono uguali.

5. Si consideri il campo vettoriale $\vec{u}(x, y) = (xy^2, x^2y)$.

- Si calcoli l'integrale

$$\int_{\mathcal{C}: A \rightarrow B} \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

lungo il cammino $\mathcal{C}$ che consiste della linea spezzata che connette il punto $A = (0, 1)$ con il punto $P = (3, 1)$ con un segmento orizzontale e poi il punto P con il punto $B = (3, 4)$ con un segmento verticale.

- Si riconosca che $\vec{u}$ è il gradiente di una funzione scalare $w(x, y)$ e si identifichi tale funzione (a meno di una costante additiva arbitraria).
- Si ricalcoli l'integrale del primo punto usando il teorema per cui l'integrale del gradiente di w lungo un cammino da A a B è uguale alla differenza di w calcolata tra gli estremi, e si verifichi che il risultato è lo stesso di quello ottenuto sopra per calcolo diretto.