Esercizi - settima settimana (4-8 aprile 2022)
Corso di Matematica II per Geologia

1. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = (x-z, 1-xy, y)$ e se ne calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dal punto $(0,0,0)$ al punto $(1,1,1)$ lungo la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t^3 \end{cases}$$

con il parametro t che va da 0 a 1.

2. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = (e^z, e^x, e^y)$ e se ne calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dal punto $(1,0,1)$ al punto $(1,1,e)$ lungo la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \\ z(t) = e^t \end{cases}$$

con il parametro t che va da 0 a 1.

3. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = (\frac{x(1-\sin\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y(1-\sin\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}})$ e se ne calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dal punto $(1,0)$ al punto $(0, e^{\pi/2})$ lungo la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

con $\rho(\theta) = e^\theta$ e il parametro θ che va da 0 a $\pi/2$. [**Suggerimento:** si verifichi preliminarmente che il campo vettoriale assegnato è chiuso; il dominio di definizione, che va scelto in modo tale da contenere completamente la curva assegnata, può essere scelto senza buchi, quindi il campo è conservativo; se ne calcoli la primitiva e si calcoli così l'integrale assegnato.]

4. Si verifichi che i seguenti campi vettoriali $\vec{F}(x,y)$ su $\mathbb{R}^2$ sono conservativi e per ognuno di essi se ne calcoli la primitiva (ovvero, la funzione scalare $H(x,y)$ tale che $\vec{F}(x,y) = \vec{\nabla}H(x,y)$):

- $\vec{F}(x,y) = (x^2y + y^2 + 1, x^3/3 + 2xy)$
- $\vec{F}(x,y) = (2e^y - ye^x, 2xe^y - e^x)$
- $\vec{F}(x,y) = (\frac{1}{1+y^2}, \frac{-2xy}{(1+y^2)^2})$

5. Si verifichi che il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = (e^x \cos y + yz, xz - e^x \sin y, xy)$ su $\mathbb{R}^3$ è conservativo e se ne calcoli la primitiva.

6. Usando il teorema di Green, si verifichi che l'area di una regione piana $A \subset \mathbb{R}^2$ delimitata da una curva chiusa $\mathcal{C}_A$ si può calcolare nei tre modi seguenti:

$$\begin{aligned}\text{Area}(A) &= \iint_A dx\,dy \\ &= \oint_{\mathcal{C}_A} \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ &= \oint_{\mathcal{C}_A} \vec{G} \cdot d\vec{s}\end{aligned}$$

dove nella seconda e terza riga l'integrale curvilineo lungo il bordo $\mathcal{C}_A$ di A è percorso in senso *antiorario*; inoltre, nella seconda riga $\vec{F}(x,y) = (0,x)$ e nella terza riga $\vec{G}(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x)$.

7. Usando la formula $\text{Area}(A) = \oint_{\mathcal{C}_A} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ dell'esercizio precedente, si calcoli l'area della regione delimitata dall'asse x e dalla porzione di *cicloide* di equazioni parametriche $(x(t), y(t)) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ per t che va da 0 a 2π.

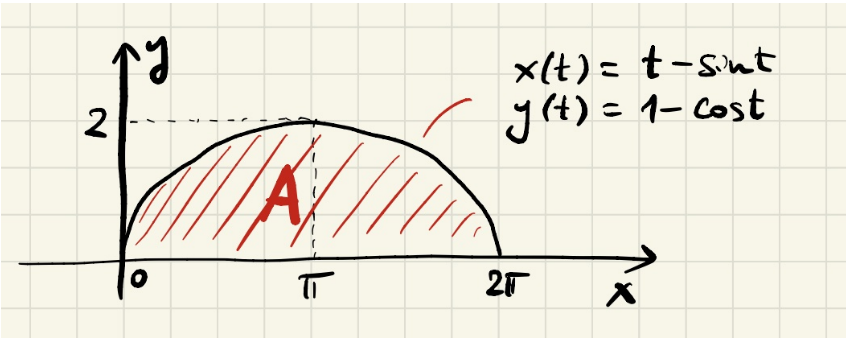

Figura 1: La regione A dell'esercizio 7.

8. Usando la formula $\text{Area}(A) = \oint_{\mathcal{C}_A} \vec{G} \cdot d\vec{s}$ dell'esercizio 6, si dimostri innanzitutto che, se $\mathcal{C}(A)$ è parametrizzata come

$$(x(\theta), y(\theta)) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta) \tag{1}$$

con θ che va da 0 a 2π, allora

$$\text{Area}(A) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(\theta)\,d\theta.$$

Usando questa formula, si calcoli l'area delimitata della *cardioide* di equazione (1), con $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$ e θ che va da 0 a 2π.

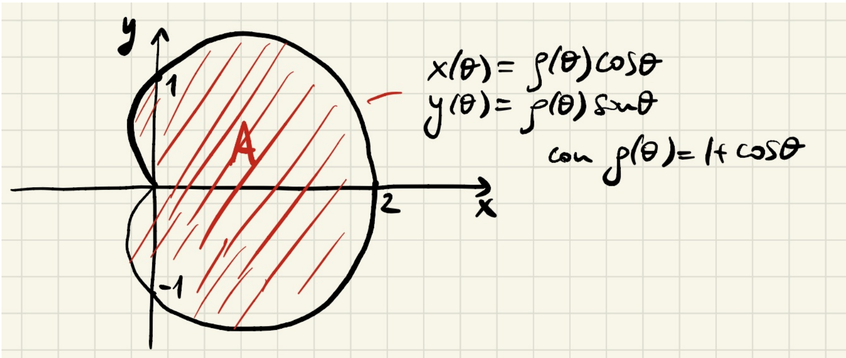

Figura 2: La regione A dell'esercizio 8.