

Esercizi - nona settimana (25-29 aprile 2022)

Corso di Matematica II per Geologia

1. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy, usando per due di essi (scelti a piacimento) il metodo di risoluzione generale per le equazioni differenziali lineari del prim'ordine e per gli altri due il metodo di separazione di variabili:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \begin{cases} x' = \frac{x+1}{\sqrt{t}} \\ x(1) = 0 \end{cases} \\ (b) \quad & \begin{cases} x' = \frac{1-x}{t} \\ x(1) = 0 \end{cases} \\ (c) \quad & \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ x(0) = 1 \end{cases} \\ (d) \quad & \begin{cases} x' = 3te^{t^2}x \\ x(0) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Per ognuna delle seguenti equazioni differenziabili a variabili separabili, si identifichino i punti di equilibrio e le corrispondenti soluzioni di punto fisso. Si discuta inoltre la natura stabile o instabile dei punti di equilibrio. Si calcoli poi la soluzione col dato iniziale $x(t) = x_0$, per x_0 diverso dai punti di equilibrio; si verifichi che la soluzione esplicita soddisfa le proprietà di stabilità o instabilità identificate sopra.

$$\begin{aligned} (a) \quad & x' = -x^2 + 4x - 4 \\ (b) \quad & x' = \frac{1}{x} - x \end{aligned}$$

3. Per ognuna delle seguenti equazioni differenziabili a variabili separabili, si identifichino gli eventuali punti di equilibrio e le corrispondenti soluzioni di punto fisso. Si calcoli poi la soluzione col dato iniziale $x(t) = x_0$, per x_0 diverso dai punti di equilibrio.

$$\begin{aligned} (a) \quad & x' = 2t\sqrt{1-x^2} \\ (b) \quad & tx' = x \ln x \\ (c) \quad & x' = \frac{e^{-x^2}}{x} \end{aligned}$$