Esercizi - decima settimana (2-6 maggio 2022)
Corso di Matematica II per Geologia

1. Determinare le soluzioni generali delle seguenti equazioni differenziali lineari del second'ordine omogenee:

$$(a)\ x'' + 10x = 0$$
$$(b)\ x'' + 2x' + 5x = 0$$
$$(c)\ x'' - 3x' + 4x = 0$$
$$(d)\ x'' + 7x' + 10x = 0$$
$$(e)\ 9x'' + 6x' + x = 0$$
$$(f)\ x'' - x' - 6x = 0$$
$$(g)\ 4x'' + 12x' + 9x = 0$$

2. Determinare la soluzione di ciascuno dei seguenti problemi di Cauchy:

$$(a)\quad \begin{cases} x'' - x' - 2x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 3 \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} x'' - 6x' + 10x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

$$(c)\quad \begin{cases} x'' - 10x' + 25x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

$$(d)\quad \begin{cases} x'' - 2x' + 5x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

3. Una massa di 10Kg è attaccata a una molla con costante elastica 50N/m e lunghezza a riposo nulla. All'istante iniziale viene rilasciata a 2m dalla sua posizione di riposo con velocità nella direzione opposta di 12m/s, in un fluido che oppone una resistenza pari a venti volte la velocità istantanea. Determinare la posizione della molla in ogni istante.

4. Determinare le soluzioni generali delle seguenti equazioni differenziali lineari del second'ordine non omogenee:

$$(a)\ x'' - 3x' + 2x = 2t^3 - t^2 + 1$$
$$(b)\ x'' - 4x' = t^2 + 1$$
$$(c)\ x'' - 2x' - 3x = 8e^{3t}$$
$$(d)\ x'' - 2x' - 3x = \cos 2t$$
$$(e)\ x'' - 3x' + 2x = 2t^3 + 1 - t^2 + e^{2t}$$
$$(f)\ x'' - 2x' + x = te^t$$

5. Determinare la soluzione di ciascuno dei seguenti problemi di Cauchy:

$$(a) \quad \begin{cases} x'' + x = t + 1 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 2 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} x'' - 2x' + x = e^t \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} x'' - x' - 2x = 2\sin t \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

$$(d) \quad \begin{cases} x'' + 9x = \sin t + e^{2t} \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

6. Si consideri l'equazione per l'oscillatore armonico smorzato e forzato con forzante sinusoidale

$$mx'' + \lambda x' + kx = F_0 \sin \omega t$$

con $m > 0$ la massa dell'oscillatore, $\lambda > 0$ il coefficiente di attrito, $k > 0$ la costante elastica, $F_0 > 0$ l'ampiezza della forzante e $\omega > 0$ la sua pulsazione. Dividendo ambo i membri per m e usando la formula di Eulero per gli esponenziali complessi, tale equazione si può riscrivere nella forma

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}), \tag{1}$$

con $\gamma = \frac{\lambda}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ e $f_0 = F_0/m$.

- Usando questa rappresentazione, si cerchi una soluzione particolare della (1) nella forma

  $$x_p(t) = Ae^{i\omega t} + \bar{A}e^{-i\omega t} \tag{2}$$

  con A un numero complesso da determinare e $\bar{A}$ il suo complesso coniugato. Per determinare A si sostituisca la (2) nella (1) e si risolva per A.

- Si riscriva poi x_p in forma reale, come $x_p(t) = C\cos(\omega t + \theta)$ con $C = |A|$: si scrivano esplicitamente le espressioni di $C = |A|$ e di θ come funzioni di f_0, γ, ω_0.

- Si calcoli la potenza media P esercitata dalla forza esterna sull'oscillatore usando la formula

  $$P = \frac{1}{T}\int_0^T x_p'(t) F_0 \sin \omega t \, dt,$$

  dove $T = \frac{2\pi}{\omega}$ è il periodo della forzante (la formula sopra dice che la potenza media è la media su un periodo del prodotto forza $\times$ velocità).

- Si verifichi che P, come funzione di ω, raggiunge il massimo per $\omega = \omega_0$ (condizione di *risonanza*).

- Si verifichi che alla risonanza $\omega = \omega_0$ la soluzione $x_p(t)$ è fuori fase rispetto alla forzante: se la forzante, come stiamo assumendo, è un seno, allora la soluzione $x_p(t)$ è un coseno, $x_p(t) = -C\cos \omega t$.