

Prova pre-esonero (21 maggio 2022)
Corso di Matematica per Geologia (Modulo 2)

1. Si calcoli il seguente integrale definito di singola variabile:

$$\int_{-1}^2 x\sqrt{x+1} dx$$

2. Si calcoli il seguente integrale triplo:

$$\iiint_S \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 2z^2} dx dy dz$$

dove S è la sfera di raggio 2 centrata nell'origine.

3. Si calcoli il lavoro compiuto dal campo di forze $\vec{F} = \vec{F}(x, y) = (xy, 2y^2)$ lungo il cammino che connette il punto del piano cartesiano $P_1 = (-1, 0)$ con $P_2 = (0, 1)$ che consiste del quarto di circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine, percorsa in verso orario.

4. Si identifichino i punti di equilibrio della seguente equazione differenziale a variabili separabili per la funzione incognita $x = x(t)$:

$$x' = 1 - x^2$$

e se ne discuta la stabilità. Si calcoli poi la soluzione col dato iniziale $x(0) = 0$ e si verifichi che per t che tende a $+\infty$ tale soluzione tende al punto di equilibrio stabile, mentre per t che tende a $-\infty$ tende a quello instabile.

5. Si risolva il seguente problema di Cauchy per la funzione incognita $x = x(t)$:

$$\begin{cases} x'' + 4x' - 2x = t^2 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

6. Si risolva la seguente equazione delle onde sul segmento $[0, 1]$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{9} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = \sin(2\pi x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -2 \sin(\pi x) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$