Seconda prova pre-esonero (8 giugno 2022)
Corso di Matematica per Geologia (Modulo 2)

1. Si calcoli il seguente integrale definito di singola variabile:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^{2x} - e^x} dx$$

2. Si calcoli il seguente integrale doppio:

$$\iint_A \frac{x^2}{y^2} dx dy$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$.

3. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F} = \vec{F}(x, y) = ((2-1/x^2)e^{x^2+y^2}, (2y/x)e^{x^2+y^2})$ definito sul semipiano $\mathbb{H}_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Si verifichi che $\vec{F}$ è conservativo su $\mathbb{H}_+$ e se ne determini la primitiva. Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ lungo la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t^2 \\ y(t) = \frac{2t}{t+1} \end{cases}$$

con t che va da and 0 a 1.

4. Si risolva il seguente problema di Cauchy per la funzione incognita $x = x(t)$:

$$\begin{cases} x' = (x - \frac{1}{x}) \frac{1}{t} \\ x(1) = \sqrt{2} \end{cases}$$

5. Si determini l'integrale generale della seguente equazione differenziale del second'ordine per la funzione incognita $x = x(t)$:

$$x'' + x' + x = \cos t$$

6. Si risolva la seguente equazione delle onde sul segmento $[0, 2]$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = 2 \sin(\pi x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin(\frac{3}{2} \pi x) \\ u(0, t) = u(2, t) = 0 \end{cases}$$