

Corso di Matematica per Geologia

Prova scritta, 04/07/2023

Cognome e Nome	
Numero di matricola	

1. Si calcolino due dei tre seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 1} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin 4x}{(\sin 2x)^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \ln(1+x)}.$$

[**Facoltativo.**] Si calcoli l'altro limite.

2. Si studi il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = 2x^2 - 3x - \ln|x|.$$

In particolare:

- si determini il dominio D_f della funzione,
- si studi il segno della funzione,
- si determini il comportamento della funzioni ai bordi del suo dominio di definizione, e si discuta l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali o verticali,
- si discuta dove la funzione è crescente e dove è decrescente, e si determino gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo,
- si disegni il grafico della funzione

[**Facoltativo.**] (f) Si discuta dove la funzione è convessa e dove è concava. (g) Una volta completato il grafico si determini il codominio C_f della funzione.

3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

- Si dimostri che A è invertibile e si calcoli la matrice inversa A^{-1} .
- Si calcolino gli autovalori e gli autovettori di A . Si verifichi in particolare che gli autovettori sono ortogonali.

4. Si discuta la continuità in $(0, 0)$ della seguente funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2y + xy^2}{x^3 + y^3}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

e se ne calcolino le derivate parziali nel punto $(x, y) = (1, 1)$.

[**Facoltativo.**] Si calcoli la derivata direzionale della funzione $f(x, y)$ nella direzione del vettore $\vec{u} = (1, 1)$, nel punto $(x, y) = (1, 1)$.

5. Si calcoli il seguente integrale doppio:

$$\iint_R \frac{\sin(x+y)}{(x-y)^2} dx dy,$$

dove $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x - y \leq 3, 0 \leq x + y \leq \pi\}$, eseguendo il cambio di variabili da (x, y) a (u, v) , con $u = x + y, v = x - y$.

6. Si consideri il campo vettoriale: $\vec{F} = \vec{F}(x, y) = (\frac{2x}{x^2+y}, \frac{1}{x^2+y})$ e se ne calcoli l'integrale curvilineo $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ lungo la curva C di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) &= t^2 e^{t/2} \\ y(t) &= e^t \end{cases}$$

[**Suggerimento:** Si noti che \vec{F} è un campo chiuso e conservativo: se ne calcoli il potenziale e si usi la forma esplicita di tale potenziale per calcolare l'integrale curvilineo assegnato.]

7. Si consideri la seguente equazione differenziale per la funzione incognita $x = x(t)$:

$$x' = \frac{(x^2 - 1)^3}{x}.$$

a) La si risolva l'equazione in corrispondenza del dato iniziale $x(0) = 2$.

b) Si riconosca che l'intervallo di definizione della soluzione $x(t)$ è della forma $(-\infty, t_0)$. Qual è il valore di t_0 ?

c) Si calcolino i limiti di $x(t)$ per $t \rightarrow -\infty$ e per $t \rightarrow t_0^-$.

8. Si determini l'integrale generale della seguente equazione differenziale del second'ordine per la funzione incognita $x = x(t)$:

$$x'' - 4x' + 4x = e^t + e^{2t}$$