Corso di Matematica per Geologia - AA 2021/2022

Prova scritta, 5/9/2022

Cognome e Nome	
Numero di matricola	

1. Si considerino il vettore $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ e la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$:

a) calcolare la traccia ed il determinante di A;

b) stabilire se A è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinare la matrice inversa;

c) determinare i vettori $\vec{v} = A\vec{u}$ e $\vec{w} = A^2\vec{u}$;

d) calcolare il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$ e verificare la disuguaglianza $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}|\,|\vec{w}|$;

e) calcolare il prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{w}$ e verificare che $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (-\vec{v} + 5\vec{w}) = (\vec{w} \times \vec{v}) \cdot (\vec{v} - 5\vec{w}) = 0$;

f) determinare l'angolo compreso tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$;

g) verificare che $\vec{z} = (3, 0, 0)$ è un autovettore di A e determinare l'autovalore associato.

2. Calcolare i seguenti limiti motivando la risposta (ln è il logaritmo naturale):

$$\lim_{x \to 0} \frac{4(1 - \cos x)^3}{\ln(1 + 2x^6)}\,, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{4(1 - \cos x)^3}{\ln(1 + 2x^6)}\,.$$

3. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = (x^2 - 3)\, e^{-(x-1)}\,.$$

In particolare:

a) determinare il dominio di definizione (discutendo eventuali simmetrie) e il segno della funzione;

b) studiare il comportamento della funzione ai bordi del dominio di definizione e l'eventuale esistenza di asintoti;

c) determinare gli intervalli di monotonia ed individuare eventuali punti di massimo o minimo;

d) studiare la concavità.

e) [**Facoltativo:** determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $x = 1$].

4. Si consideri la funzione (ln è il logaritmo naturale)

$$F(x, y) = x^2 \ln(2 - y^2) - 3y\,.$$

a) Stabilire se la derivata direzionale di F lungo $\vec{v} = (3, 4)$ nel punto $(x, y) = (2, 0)$ è positiva o negativa;

b) Stabilire se il punto $(x, y) = (-2, 1)$ è un punto di massimo, di minimo, di sella, oppure nessuno dei precedenti.

5. Si calcoli il seguente integrale doppio:

$$\iint_T ye^{x+y}\,dx\,dy$$

dove T è il trapezio di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,0)$.

6. Si consideri il campo vettoriale: $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = (z/x, y, xy/z)$ con $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e se ne calcoli l'integrale curvilineo $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ lungo la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = te^t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$$

con il parametro t che va da 0 a π.

7. Si risolva il seguente problema di Cauchy per la funzione incognita $x = x(t)$:

$$\begin{cases} x' = t^2x^3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Si calcoli in particolare l'intervallo di esistenza della soluzione $x(t)$ e il limite della stessa per t che tende ai bordi del dominino di definizione.

8. Si determini l'integrale generale della seguente equazione differenziale del second'ordine per la funzione incognita $x = x(t)$:

$$x'' - 3x' - 4x = e^t + e^{-t}$$