Corso di Matematica per Geologia - AA 2021/2022

Prova scritta, 06/02/2023

Cognome e Nome	
Numero di matricola	

1. Si considerino il vettore $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$:

a) calcolare la traccia ed il determinante di A;

b) stabilire se A è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinare la matrice inversa;

c) determinare i vettori $\vec{v} = A\vec{u}$ e $\vec{w} = A^2\vec{u}$;

d) calcolare il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$ e verificare la disuguaglianza $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}|\ |\vec{w}|$;

e) determinare il coseno dell'angolo compreso tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$;

f) verificare che 4 è un autovalore di A e determinare l'autovettore corrispondente.

2. Calcolare i seguenti limiti motivando la risposta (e è il numero di Nepero):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{3x\,(1 - e^{-x})}\,, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{\cos(2x) - 1}{3x\,(1 - e^{-x})}\,.$$

3. Si consideri la funzione

$$f(x) = (x + 1)\ \ln^2(x + 1)\,.$$

Dopo averne:

a) determinato il dominio di definizione e il segno,

b) determinato il comportamento ai bordi del dominio di definizione,

c) determinato gli intervalli di monotonia ed individuato eventuali punti di massimo o minimo,

d) studiato la concavità,

si **disegni il grafico** di $y = f(x)$ sul piano cartesiano.

[**Facoltativo:** determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $x = e - 1$, dove e è il numero di Nepero, e la si disegni sul grafico].

4. Si consideri la funzione

$$F(x, y) = x\ \ln(x + y + 1)\,.$$

a) Stabilire se la derivata direzionale di F lungo $\vec{v} = (1, -1)$ nel punto $(x, y) = (1, 0)$ è positiva o negativa;

b) Stabilire se il punto $(x, y) = (0, 0)$ è un punto di massimo, di minimo, di sella, oppure nessuno dei precedenti.

5. Si calcoli il seguente integrale doppio:
$$\iint_P \frac{y-1}{1+x^2}\,dx\,dy$$
dove P è il parallelogramma di vertici $(0,0)$, $(2,1)$, $(2,3)$, $(0,2)$.

6. Si consideri il campo vettoriale: $\vec{F} = \vec{F}(x,y) = (x\ln(y+1), y^2)$ e se ne calcoli l'integrale curvilineo $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ lungo la porzione $\mathcal{C}$ di parabola di equazione $y = x^2$ che va dal punto $(0,0)$ al punto $(1,1)$.

7. Si consideri la seguente equazione differenziale per la funzione incognita $x = x(t)$:
$$x' = 1 - e^{-x}.$$

a) Si determini il punto di equilibrio del sistema e si stabilisca se è stabile o instabile.

b) Si risolva l'equazione in corrispondenza del dato iniziale $x(0) = \ln(2)$. [**Suggerimento:** prima di integrare per separazione di variabili, si riconosca che $1 - e^{-x}$ è uguale a $\frac{e^x-1}{e^x}$ e si riscriva il membro di destra in tal modo.]

c) Si calcolino i limiti della soluzione determinata al punto precedente per $t \to \pm\infty$ e si verifichi che i risultati siano compatibili con il valore del punto fisso determinato al punto (a) e con la sua natura stabile o instabile.

8. Si determini l'integrale generale della seguente equazione differenziale del second'ordine per la funzione incognita $x = x(t)$:
$$x'' + 4x = t + \cos(2t)$$