Corso di Matematica per Geologia - AA 2021/2022

Prova scritta, 8/11/2022

Cognome e Nome	
Numero di matricola	

1. Si considerino il vettore $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$:

a) calcolare la traccia ed il determinante di A;

b) stabilire se A è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinare la matrice inversa;

c) determinare i vettori $\vec{v} = A\vec{u}$ e $\vec{w} = A^2\vec{u}$;

d) calcolare il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$ e verificare la disuguaglianza $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}|\, |\vec{w}|$;

e) calcolare il prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{w}$ e verificare che $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 0$;

f) determinare l'angolo compreso tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$;

g) verificare che $\vec{z} = (1, 1, \sqrt{3})$ è un autovettore di A e determinare l'autovalore associato.

2. Calcolare i seguenti limiti motivando la risposta (ln è il logaritmo naturale):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x^2 + 5x^4)}{\big(\ln(1+2x)\big)^2}\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(3x^2 + 5x^4)}{\big(\ln(1+2x)\big)^2}\,.$$

3. Studiare il grafico della funzione (ln è il logaritmo naturale)

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}\,.$$

In particolare:

a) determinare il dominio di definizione e il segno della funzione;

b) calcolare i limiti a cui tende la funzione ai bordi del dominio di definizione e stabilire l'eventuale esistenza di asintoti;

c) determinare gli intervalli di monotonia ed individuare eventuali punti di massimo o minimo;

d) studiare la concavità.

e) $\big[$**Facoltativo:** determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $x = 1\big]$.

4. Si consideri la funzione

$$F(x, y) = \sin(xy) + 3x\,.$$

a) Stabilire se la derivata direzionale di F lungo $\vec{v} = (3, 2)$ nel punto $(x, y) = (\pi, 1)$ è positiva o negativa;

b) Stabilire se il punto $(x, y) = (0, 0)$ è un punto di massimo, di minimo, di sella, oppure nessuno dei precedenti.

5. Si calcoli il seguente integrale triplo:

$$\iiint_C (3x^2 + 2xy)\, dx\, dy\, dz$$

dove C è il tronco di cono retto con base maggiore il cerchio di raggio 2 centrato nel punto $(0, 0, 1)$ e appartenente al piano $z = 1$ e base minore il cerchio di raggio 1 centrato nel punto $(0, 0, 2)$ e appartenente al piano $z = 2$.

6. Si consideri il campo vettoriale: $\vec{F} = \vec{F}(x, y) = (\frac{1}{xy}, \frac{1-\ln(xy)}{y^2})$ e se ne calcoli l'integrale curvilineo $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ lungo la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = e^{t^2} \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$$

con il parametro t che va da 0 a 1.

7. Si risolva la seguente equazione differenziale per la funzione incognita $x = x(t)$:

$$xx' = e^t(x^2 + 1)$$

con dato iniziale $x(0) = \sqrt{e^2 - 1}$. Si verifichi che la soluzione è ben definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ e si calcolino i limiti $\lim_{t \to \pm\infty} x(t)$.

8. Si determini l'integrale generale della seguente equazione differenziale del second'ordine per la funzione incognita $x = x(t)$:

$$x'' - x' - 2x = e^t \cos t$$